LENGOAIA FORMALAK ETA LOGIKA JOKOAK

IRALE-Gasteiz

R-400

2009/10-1

ROBERTO HERNÁEZ

AURKIBIDEA

0.- HITZAURREA

Ezer baino lehen, esan nahi dut lan hau Logika formala hobeto ulertzeko saiakera xume bat besterik ez dela. Hiru atal nagusi ditu: lehenengoa, lengoaiari buruzkoa; bigarrena, proposizio-logikaren ingurukoa; eta hirugarrena, silogismoen gainekoa. Atal horiek jokoen bidez aurkeztu ditut; izan ere, saiatu naiz haiek modu ludiko eta erakargarrian azaltzen.

Horretarako erabili ditudan materialak dira ikasturte askoan ikasleekin landu ditudanak. Logika 1. Batxilergoan ikasten da, Filosofiaren curriculumaren barruan. Atal hori Curriculum berrian murriztu bada ere, nire ustez, Logikak garrantzi handia dauka; izan ere, metodo zientifikoaren oinarrizko elementua izateaz gain, zientzia beregaina ere bada. Garrantzitsua da, halaber, Filosofian argumentuak eta hausnarketa zuzenak egiteko; ikasleen adimena ondo estimulatzeko eta antolatzeko, arrazionaltasuna edo "*Logos*a" behar den moduan gara dezaten; eta, azkenik, gaur egungo aurrerapen teknologikoak hobeto ulertzeko. Beraz, liburuxka honekin, ikasleen *konpetentzia logikoa* landu nahi dut, hau da, lortu nahi dut haiek arrazoibideen baliozkotasuna identifikatzeko gai izatea.

Lan honetan bi logika edo kalkulu mota jorratu ditut. Lehenengo zatian proposizio-logika aztertu dut, eta hainbat asmakizun logiko proposatu ditut, ikasleek kalkulu horren legeak barnera ditzaten. Horretarako, Raymond Smullyan logikari eta matematikari ospetsua hartu dut oinarri. Smullyanek liburu asko argitaratu ditu Logikari buruz, baina ez dira liburu teorikoak, asmakizun logikoen bildumak baizik, eta guztiek helburu berbera dute: logika naturala garatzea eta indartzea, asmakizunen bidez. Argitaratu duen azken liburuan[1], honela deitu dio landu duen arloari: *The logic of lying and truth-telling*, hau da, "Gezurra eta egia esatearen logika". Metodo horrekin, eta kontu teorikoetan asko sakondu gabe, arazo logiko klasikoak aurkez daitezke, oso modu atsegingarrian aurkeztu ere; gainera, bide egokia da, nire ustez, Logikari sarbidea emateko.

Bigarren zatian, silogismoak landu ditut. Silogismoen inguruko logika predikatu-logikaren atal txiki bat besterik ez da. Predikatu-logika edo kuantifikazio-logika oso gai zabala da eta, gainera, ez da Batxilergoko 1. mailaren helburua gai horretan sakontzea; hori dela eta, silogismoak egiteko metodo berezi bat baino ez dut aurkeztu. Metodo horrek "diagrama triliterala" du izena, eta beste matematikari batek asmatu zuen XIX. mendearen bukaeran: Lewis Carroll. Logika oso garrantzitsua zen harentzat, baina bere kezka nagusia zientzia hori era gustagarrian aurkeztea eta azaltzea[2] izan zen, eta baita lortu ere. Horren adibidea da liburuxka honetan silogismoak egiteko agertzen den metodoa.

Bukatzeko esan lan hau IRALEk antolatzen dituen ikastaroen barruan egina dela, hain zuzen ere, Batxilergorako materiala prestatzeko ikastaro praktikoan (R-400). Beraz, eduki dudan aukerari esker izan da posible egitasmo hau burutzea, eta, nola ez, Gasteizko IRALEko irakasleek emandako laguntzari eta jakintzari esker. Batez ere eskerrak eman nahi nizkieke Ima Agirianori eta Txiki Ollorari, nire ondoan jo eta ke aritu baitira zuzentzen eta lanari gatz pixka bat ematen.

[1] RAYMOND SMULLYAN, *Logical Labyrinths*, A.K. Peters, Wellesley, Canada, 2009.
[2] LEWIS CARROLL*: Synbolic Logic*, MacMillan, London, 1897. Itzulpena: *El juego de la lógica*. Alianza Editorial, Madrid, 1982. Itzultzailea: Alfredo Deaño.

1.- LENGOAIAREN ELEMENTUAK ETA DIMENTSIOAK

1.1.- Sarrera gisa: lengoaiaren geruzak

"Essaldi honek hhiru akats dauzka"

Batzuek pentsatuko dute hor goian agertzen den esaldia faltsua dela. Baina arretaz irakurriz gero, konturako lirateke guztiz egiazkoa dela. Ematen du bi akats bakarrik daudela, baina ez, hiru dira: esaldian bertan dauden biak, eta hirugarrena, esaldiak baieztatzen duena. Lengoaia naturalek aberastasun handia dute, mundu honetan existitzen den guztia deskribatzeko eta adierazteko gai baitira. Baina aldi berean, oso mugatuak dira; zehaztasunik gabekoak. Ideia hori oso sakonki aztertu zuen XX. mendeko pentsalaririk handienetariko batek, Ludwig Wittgenstein filosofoak. Hark esan zuen: "Nire lengoaiaren mugak nire munduaren mugak dira" (Wittgenstein, *Tractatus*, 5.6.). Austriako filosofoaren arabera, gure lengoaia naturalek gauzak nolakoak diren *esaten* dute, baina aldi berean *erakusten* edo *adierazten* dute esaten dutena baina gehiago. Nolabait, badago lengoaia-maila bakar bat baino gehiago. Goiko esaldi arraro hori horren adibidea da: *erakusten* duena eta *dioena* ez dira gauza bera.

Wittgensteinen arabera, Filosofiaren eta Logikaren helburuetako bat da lengoaia naturalen tranpak ekiditea. Izan ere, lengoaiak pentsamenduari itxura aldatzen dio, eta, horregatik, Filosofiaren helburua da lengoaiak adimenean eragiten duen sorgintzearen kontra borrokatzea. (Wittgenstein, *Filosofia Azterketak*, § 109).

1.2.- Gizakia animalia sinboloduna da

*Gizakia da "logos*a*" duen animalia bakarra,*
mintzatzen dena.

ARISTOTELES, *Politika*; 1253 a 1

Lengoaia da gizaki egiten gaituena, eta oso lotuta dago pentsamenduarekin; izan ere, pentsamendua gure barne-hizkuntza da, alegia, inork ezin du pentsatu bere buruarekin hitz egin barik. Azken finean, pentsamendua gure barne-elkarrizketa da.

Lengoaiaren eta pentsamenduaren arteko erlazioa azpimarratu nahian, antzinako Greziako filosofoek ***logos*** hitza erabili zuten. Hitz horrek, barruan, esanahi bat baino gehiago ditu: *logos*a da "hitza", "pentsamendua", "logika", "diskurtsoa", "hausnarketa", "arrazoia", "adimena"… *Légein* aditzetik dator eta "mintzatu", "esan", "kontatu" esan nahi du.

Animaliek euren lengoaia bereziak erabiltzen badituzte ere, gizakiok bakarrik daukagu benetako *logos*a, munduan dauden gauzak deskribatzeko benetako lengoaia konplexua. Hori dela eta, gizakiari "animalia logikoa" edo "sinboloduna" deitu zaio. Aristotelesek (K.a. IV. mendean) esan zuen gizakiok garela, bizidunen artean, *logos*a duen animalia bakarra.

Logos hitzarekin grekoek, baita ere, esan nahi zuten hizkuntzaren barruan logika bat dagoela, eta, hizkuntza erabiltzen dugunean, eskema edo erregela logiko batzuk errespetatu behar ditugula, nahitaez; beraz, Logikari buruz –zientzia bezala, behintzat– ezer gutxi dakigun arren, denok daukagu *logos*a, hau da, logika natural bat hausnarketak edota argudioak aurrera eramateko. *Logos*, logika edo arrazoiari esker, gai gara komunikatzeko eta elkar ulertzeko. Xavier Zubiri filosofo donostiarrak esan zuenez, hizkuntza, nolabait, "elkartasunaren organoa" da (Zubiri, *Sobre el Hombre*, 296 or.) eta *logos* horri esker bizi gaitezke gizarte batean: animalia arrazionalak eta sinbolodunak izateak ahalbideratzen digu animalia sozialak izatea (*zoon politikón*, Aristoteles-en arabera).

Lengoaia naturalak sistema edo kode sinbolikoak dira, oso konplexuak, milioika urteko eboluzioaren ondorioa. Lengoaiak gu egiten gaitu eta aldi berean guk egiten dugu lengoaia. Baina, nolakoa da sistema sinboliko hori?

1.3.- Lengoaia zeinu-sistema da

Badira munduan 6.000 bat hizkuntza ezberdin. Hizkuntzak lengoaia naturalak dira, hau da, giza eboluzioaren ondorio, eta, bizidun guztiei gertatzen zaien moduan, hizkuntzak ere agertu eta desagertu egiten dira. Aldaketak, bizidunen kasuan, kode genetikoan suertatzen dira; hizkuntzen kasuan, berriz, kode sinbolikoan. Mutazioak ere gertatzen dira, eta duela 500 urte erabiltzen zen hitz edo zeinu bat, gaur egun, desagertuta egon daiteke.

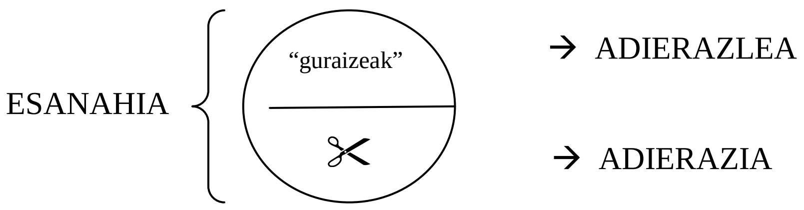
Lengoaiaren kodean, zeinuak dira osagai nagusiak. Charles Peirce filosofo estatubatuarrak (1839-1914) garatu zuen “zeinuen teoria” (*Semiotika*, grekotik *semeion*, “seinale”). Haren arabera, zeinu bat da “norbaitentzat zer edo zer adierazten duen zerbait”. Esate baterako, “guraize” hitzak (*zerbait*) beste zerbait (✂) adierazten du euskara dakien norbaitentzat.

Zeinu bakoitzak hiru elementu dauzka:

1.- **Adierazlea** (zerbait hori, *hitza*): “guraizeak”.

2.- **Adierazia** (beste zerbait, *objektua*): “papera mozteko balio duen tramankulua”.

3.- **Esanahia**: aurreko bi elementuen arteko erlazioa, hots, adierazlearen eta adieraziaren arteko erlazioa. Ikusiko dugun bezala, erlazio hori oso garrantzitsua da eta hiru motatakoa izan daiteke.



Adierazle bezala “gitoreto” jarriko bagenu zeinu batean, orduan ez luke izango esanahirik, ezer adierazten ez duelako. Hitz hori ez da existitzen; ez da, beraz, zeinu jakin bat, guk asmatutako lengoaia berezi batean kokatu ezean.

1.4.- Zeinu motak

Esanahia –adierazlearen eta adieraziaren arteko erlazioa, alegia– hiru motatakoa izan daiteke. Horren arabera eta Peirce-ri jarraituz, esan dezakegu hiru zeinu mota daudela hizkuntza-kodeetan:

Lehenik, *ikonoak*: zeinu mota honetan, esanahia *antzekotasunagatik* sortzen da; adierazlea eta adierazia antzekoak dira. Horren adibidea pertsona baten argazkia edota karikatura dugu. Pertsona bat eta bere argazkia antzekoak dira, eta, hortaz, esan dezakegu argazki hori pertsonaren zeinua dela, baina ez edonolako zeinua, *ikonoa* baizik. *Ikono* hitza grekotik dator eta "irudia" esan nahi du.

Bigarrenik, *seinaleak*: esanahia *kausalitateagatik* ere sor daiteke. Adierazlea adieraziaren ondorioa da kasu honetan, eta, aldi berean, adierazia adierazlearen kausa da. Adibidez, kea sua dagoelako seinalea da (kea suaren ondorioa da eta sua kearen kausa).

Azkenik, *sinboloak*. Hauek dira zeinurik garrantzitsuenak eta lengoaiak –bai naturalak, bai artifizialak– osatzen dituztenak. Sinboloen esanahia ez da sortzen erlazio natural baten bidez, baizik eta adostutako erlazio baten bitartez. Zeinu mota honetan, adierazlearen eta adieraziaren arteko erlazioa erabat konbentzionala da, hitzarmenezkoa. "✂" adierazteko, hainbat sinbolo edo adierazle ezberdin erabil ditzakegu: "guraizeak", "tijeras", "scissors", "ciseaux", "schere"… Hizkuntzaren edo kulturaren arabera, adierazle ezberdinak daude gauza bera adierazteko.

Hori jakinda, beste pauso bat eman dezakegu, hizkuntzak nolakoak diren hobeto zehazteko: lengoaia natural guztiak, eta lengoaia artifizial gehienak, sinboloz osatuta daude. Denak dira zeinu-sistemak, baina zehaztu nahi badugu, lengoaiak *sinbolo-sistemak* direla esan behar dugu. Horrengatik guztiarengatik esan dezakegu gizakiok animalia sinbolodunak garela, batik bat, zeinu mota horiek erabiltzen ditugulako. Gainerako animaliek, berriz, beste mota batekoak erabili ohi dituzte, seinaleak edo zeinu naturalak, batez ere.

1.5.- Lengoaiaren funtzioak eta dimentsioak

Badakigu, beraz, hizkuntzak sinbolo-sistemak direla, eta sistema guztiak bezala, oso egituratuak, *forma logiko* bat baitute barruan. Forma edo sistema sinboliko horren bidez interpretatzen dugu mundua, eta aldi berean pentsamendua egituratzen zaigu. Barruan daukagun forma linguistiko horrek zehazten du gure mundu-ikuskera. Horiek horrela, burura etortzen zaizkigu Immanuel Kant-en *aprioriko* forma horiek, adierazteko mundua berez ez dela guregandik apartekoa, baizik eta guk ezagutzen dugun modukoa; hau da, hizkuntzaren bitartez izendatzen dugun modukoa.

Lengoaiaren helburu nagusia da gure artean komunikatzea. Horretarako eta Karl Bühler filosofoari jarraituz, hiru funtzio ezberdin bereizi ditzakegu hizkuntzetan:

1.- **Funtzio adierazlea edo informatzailea**: Lengoaiak informazioa ematen du; errealitatea deskribatzen du. Adierazten dena egia edo faltsua izan daiteke. Liburuxka honetan, funtzio hori duten esaldiak edo enuntziatuak jorratuko ditugu. Adibidez: “Euria ari du”, “Nire laguna errusiarra da”, “Gorbeia mendia elurtuta dago”.

2.- **Funtzio adierazkorra edo espresiboa**: hizkuntzaren bidez, sentimenduak eta emozioak adierazten dira. Ez du deskribatzen mundua, baizik eta gure barruko egoera (alaitasuna, tristezia, beldurra, haserrea…). Esaldi hauek ez dira, ez egiazkoak, ezta faltsuak ere. Adibidez: “Bihar elkartuko gara!”, “Gustatuko litzaidake euria egitea”.

3.- **Funtzio deitzailea**: Entzulearen jokabidea aldatu edota bideratu nahi denean erabiltzen dugu funtzio hau. Oro har, aginteak, eskaerak, gomendioak edo galderak izaten dira. Adibidez: “Atera uretatik ziztu bizian!”, “Utz iezaiozu bizikleta anaiari!”, “Pasatuko didazu ogia?”. Kasu honetan ere, esaldi horiek ez dira ez egiazkoak ezta faltsuak ere.

Hizkuntzetan, hiru funtzio horiek nahastu egiten dira, eta aberastasuna ematen diote lengoaiari. Baina guk, logikari buruzko gaietan, lehenengo funtzioa baino ez dugu landuko, hau da, funtzio adierazlea. Bere garaian, Aristoteles konturatu zen funtzio hori logikarekin zegoela lotuta, eta lengoaiaren erabilera *apofantikoa* deitu zion (*apofasis* hitzak grekoz “adierazpena” edo “enuntziazioa” esan nahi du). Aristotelesen arabera, diskurtso guztiak esanguratsuak dira, baina denak ez dira *apofantikoak*; egiazkoak edo faltsuak izan daitezkeenak baino ez dira apofantikoak. Eta hori da diskurtso logikoaren kasua, argudioen edo arrazoibideen baliozkotasuna aztertzen duelako.

Hizkuntzek, sinbolo-sistemak diren neurrian, egitura bat daukate, **Semiotika**k aztertzen duena. Horren bidez dakigu, lengoaiak erabiltzeko, inplizituki erregela batzuk jakin behar ditugula. Adibidez, sei urteko ume batek badaki ondo mintzatzen, Semiotikari edo Gramatikari buruz ezer ez badaki ere. Beraz, ez du esango: (1) –"Dut arratsaldean joan hondartzara nik nahi"; horren ordez, ziur aski, honela esango du: (2) –"Nik hondartzara joan nahi dut arratsaldean". Ume horrek, nolabait, erregela batzuk dakizki –kontziente izan gabe– esaldiak ondo eratzeko.

Charles Morris (1901-1979) filosofo estatubatuarrak Semiotika jorratu zuen eta, zeinuak aztertuta esan zuen hiru ikuspuntutatik edo dimentsiotatik analizatu zitezkeela. Ikus ditzagun ikuspuntuok.

1.- Zeinuak *beste zeinuekin* dauzkaten erlazioak kontuan hartuz azter daitezke. Orduan, lengoaiaren dimentsio sintaktikoari begiratzen diogu. **Sintaxia** Semiotikaren atal bat da, eta atal horretan aztertzen dira zeinuen arteko erlazioak, hau da, nola jarri behar diren zeinuak espresio zuzenak osatzeko. Hizkuntzetan sintaxiari *Gramatika* deitzen zaio eta hizkuntza baten gramatikaren arabera esan dezakegu goian aipaturiko lehenengo esaldia (1) txarto eginda dagoela, eta bigarrena (2), berriz, ondo. Espresio zuzenak eraikitzeko, erregela sintaktikoak errespetatu behar ditugu, ez bakarrik lengoaia naturaletan (hizkuntzetan), baita lengoaia artifizialetan (matematikan) ere. Adibidez, espresio hau txarto eginda dago: "= + 5 – + 2"; baina beste hau ondo eraikita dago, faltsua bada ere: "3 + 5 = 7".

2.- Zeinuak, halaber, adierazten dituzten *objektuekiko* erlazioa kontuan hartuz azter daitezke. Orduan, lengoaiaren dimentsio semantikoa agertzen zaigu. **Semantika** Semiotikaren bigarren atala da, eta zeinuen eta objektuen arteko erlazioa lantzen du, alegia, zeinuen esanahia aztertzen du. Hizkuntza baten semantika hizkuntza horren hiztegia litzateke, hiztegian agertzen baita zeinu –sinbolo, kasu honetan– bakoitzaren esanahia. Dimentsio honetan, filosofian oso garrantzitsua den kontzeptu bat agertzen da: egiaren kontzeptua. Adibidez, esaten badut: "Triangeluak lau alde ditu", orduan badakit –marraztu eta zenbatu gabe– esaldi hori gezurra dela: hitzak berak adierazten du –bere esanahia ondo ezagutuz gero- triangeluak hiru alde dituela.

3.- Azkenik, zeinuak *subjektu hiztunarekin* duten erlazioa kontuan hartuz azter daitezke. Hemen, lengoaiaren dimentsio pragmatikoa agertzen zaigu. **Pragmatika**k hiztunen asmoak, subjektuen jokabidea eta komunikazio-testuingurua hartzen ditu kontuan. Kasu honetan, lengoaia komunikabidetzat hartzen da, hau da, jendea konbentzitzeko, kontrolatzeko, manipulatzeko edo daukan maila kulturala bereizteko tresnatzat.

Behin lengoaiaren egiturari buruzko kontzeptu nagusiak aipatuta, bere testuinguruan kokatuko dugu logikaren lengoaia. Horrela jakingo dugu logika zer lengoaia mota den, eta zein diren haren ezaugarri garrantzitsuenak. Horrela baino ezin gara hasi logikarekin jolasten.

2.- LENGOAIA MOTAK ETA KALKULUAK

2.1.- Lengoaia naturalak eta artifizialak

Bi taldetan sailka daitezke zeinu-sistema guztiak: lengoaia naturalak, alde batetik, eta lengoaia artifizialak, bestetik. Gure hizkuntzak, adibidez, **lengoaia naturalak** deitzen dira, gure arbasoengandik jasotzen ditugulako. Gizakiak, mendetan, hizkuntza ezberdinak sortu eta eratu ditu (ikuspuntu honetatik, lengoaia naturalak eraikiak dira); gutako bakoitzak, gero, urte gutxian, bere ama-hizkuntza era naturalean ikasten du. Belaunaldi batetik bestera transmititzen direnez, lengoaia natural hauek *heredagarriak* dira. Guk geure arbasoengandik hizkuntza eta, beraz, kultura bat, heredatzen dugun neurrian, eurekiko esker ona izan beharko genuke. Hori da, Ortega y Gasset filosofo espainiarrak zioen bezala, kontzientzia historikoa izatea.

Lengoaia naturalek baldintzatu eta eratu egiten dute gure bizitza, gure mundu-ikuskera. Haien sinboloetan, geure baloreak eta sentimenduak daude sartuta; beraz, ez dira batere neutralak edo aseptikoak. Gauza edo objektu bera adierazteko, hainbat espresio ezberdin erabil ditzakegu eta konnotazio ugari sortu, onak eta txarrak. Gainera, sinbolo bakoitzak esanahi bat baino gehiago eduki dezake. Adibidez, “garai” hitzak adieraz dezake: a) “altua”, b) “aroa” eta c) “aletegia” (*gazt*. “hórreo”). Bestalde, lengoaia naturalak ez dira batere zehatzak, *anbiguoak* dira, eta horren adibidea komunikazioan sortutako gaizki-ulertuak dira. Esate baterako, jakin behar badugu zenbateko indarrarekin edo abiadurarekin bota behar dugun kohete bat espaziora. Lurraren grabitatea gainditzeko, ezin dugu erabili lengoaia naturala, hau da, ezin dugu esan “abiadura handiarekin”; gehiago zehaztu behar dugu erantzuna, eta horretarako beste lengoaia mota bat erabili beharko genuke, berariaz eraikia, arlo jakin batean zehaztasuna eta nabaritasuna lortzeko. Lengoaia mota hau **artifiziala** izango litzateke, jakintzaren barruan dagoen arazo bati erantzun zehatza emateko sortua delako. Lengoaia artifizial horiek ez dira heredagarriak, ezta bi adierakoak ere; aitzitik, oso *zehatzak* eta *argiak* dira. Trafiko-seinaleak, xakearen notazioa, barra-kodea, banderen lengoaia edo Morse kodea dira horrelako hizkuntzak. Oso zehatzak badira ere, eremu txiki baterako balio dute eta haien gaitasun espresiboa oso mugatua da; lengoaia naturalek, berriz, errealitatearen edozein gauza adierazteko balio dute.

Roberto Hernaez

Barra-kode hau lengoaia artifizialaren adibidea da. Edozein hitz edota zenbaki natural adieraz daiteke kode honen bidez (kasu honetan, 128-B kodearen arabera). Hau da lengoaiaren mekanizazio bat eta dendetako artikuluak kontrolatzeko eta kudeatzeko oso baliagarria da.

Jakin nahi baduzu zure izenaren kodea zein den, begiratu hemen: http://barcodez.net/ edo bilatu Interneten.

Baina badaude bi lengoaia artifizial, oso bereziak eta garrantzitsuak direnak: Matematika eta Logika. Lehenengoa oso ezaguna da; bigarrena, hain ezaguna ez bada ere, matematika-lengoaiaren antzera, oso dibertigarria izan daiteke. Biak ala biak, artifizialak izateaz gain, **formalak** ere badira, forma hutsak edo eskematikoak aztertzen dituztelako. Adibidez, “2 + 5 = 7” esaten badut, enuntziatu hori egiazkoa da, baina berdin da kantitate horiek sagarrak, laranjak edo etxeak diren; edozein kasutan egia da espresioa. Hortaz, lengoaia formalek edukiak baztertzen dituzte, eta bakarrik espresio baten forma edo eskema hartzen dute kontuan. Horrez gain, Matematikak eta Logikak badute ezaugarri berezi eta garrantzitsu bat: kalkulatzeko balio dute. Beraz, **kalkuluak** ere deitzen dira. Jakin badakigu matematikarekin kalkula dezakegula, eta horri esker ez gaituzte engainatzen dendetan. Kalkula daiteke, baita ere, zenbateko abiadurarekin bota behar dugun kohete bat Lurraren grabitatetik ateratzeko (11 km/s, hain zuzen). Logikarekin antzeko gauza gertatzen da: gure arrazoibideak edo argudioak ematerakoan, korapilatsuak badira, oker gaitezke. Hori ez gertatzeko, ideiekin eta kontzeptuekin ere kalkula daiteke, baina aritmetikaren erregelak erabili beharrean, logikaren arauak erabiltzen dira.

2.2.- Lengoaia formalak: Kalkuluak

Lengoaia bat formalizatzen badugu, egiten duguna da sinbolo zehatzak sortzea eta itzultzea. Matematikan, adibidez, ariketa honen forma edo eskema atera dezakegu, hobeto kalkulatzeko:

(1)	(1*)
Xabik gurasoek emandako paga horrela gastatzen du: erdia bere lagunekin ateratzeko, 10 € mugikorra kargatzeko eta laurden bat eleberriak erosteko. Zenbatekoa da bere paga?	$x / 2 + 10 + x / 4 = x$

Ezkerraldean (1), lengoaia naturalaren espresio bat dugu, eta, eskuinaldean (1*), ideia bera adierazten duen espresioa, baina formalizatua eta lengoaia matematiko batera itzulia. Horrela bai, erraz kalkula daiteke: bakarrik _ekuazioaren *x*-ren balioa atera behar da.

Zientzia guztiek erabili behar dituzte kalkuluak, eta zenbat eta kalkulu gehiago gauzatu, orduan eta zehatzagoa izango da zientzia jakin bat. Bi zientzia mota daude: formalak eta enpirikoak. Zientzia formalak Logika eta Matematika dira, eta gainerako zientzia enpirikoek, neurri batean edo bestean, zientzia formalak erabiltzen dituzte. Beraz, Logika eta Matematika zientzia enpirikoen oinarriak dira, hots, beharrezko baldintza zientzia horiek garatzeko. Zientzia formalek ez dute ezer esaten errealitateari edo esperientziari buruz (horregatik *a priori* deitzen dira); eskema formalak baino ez dituzte aztertzen. Zientzia enpirikoek, berriz, zer edo zer azaltzen dute errealitateari buruz haien teorien bitartez (eta horregatik *a posteriori* deitzen dira). Eta zientzia enpirikoen artean, badaude gogorragoak edo zailagoak direnak –matematika asko erabiltzen dutelako, Fisika kasu– eta arinagoak edo errazagoak direnak –matematika gutxi erabiltzen dutelako, Soziologia kasu–. Begiratu eskema hau argi ikusteko zientzia garrantzitsuenak nola sailkatzen diren:

<table>
<tr><th colspan="4">ZIENTZIEN SAILKAPENA</th></tr>
<tr><td>Formalak (a priori)</td><td colspan="3">Enpirikoak (a posteriori)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Logika

Matematika</td><td colspan="2">Natura Zientziak</td><td>Gizarte Zientziak</td></tr>
<tr><td>Fisikoak</td><td>Biologikoak</td><td rowspan="2">Soziologia
Psikologia
Ekonomia
Antropologia
Historia</td></tr>
<tr><td>Fisika
Kimika
Geologia
Astronomia</td><td>Biologia
Fisiologia
Anatomia
Botanika
Genetika</td></tr>
</table>

2.3.- Kalkuluaren elementuak

Lengoaia bat (*L*) –gure kasuan, naturala– formalizatzen dugunean, egiten duguna da lengoaia horren egitura eta espresioen formak zehaztea. Ez ditugu kontuan hartzen edukiak, formari edo egiturari baino ez diogu erreparatzen. Formalizazio hori egiterakoan, “meta-lengoaia” (L_1) bat –beste maila bateko lengoaia– erabiltzen ari gara, hots, bigarren mailako lengoaia bat lengoaia arrunta edo naturala aipatzeko. Ikus dezagun adibide bat bi lengoaia (L eta L_1) horien arteko ezberdintasuna nabarmentzeko. Ume batek, Geografia-ariketa bat egiten ari dela, galdetuko balit herrialde jakin bateko, adibidez Errusiako, zenbat hiri ezagutzen dudan, hau erantzungo nioke: –“Bada, nik Mosku, San Petersburgo eta… Vladivostok ezagutzen ditut”. Horrela, umeak baditu hiru hiri ariketan jartzeko. Baina, nik, berez, nahastu egin ditut bi lengoaiak nire erantzueran -egunero denok egiten dugun moduan–. Egia esan inoiz ez naiz egon Errusian, baina ezagutzen ditut Errusiako hiru hiri horien *izenak* (L_1 erabiltzen ari naiz), baina ez ditut ezagutzen *hiriak* (L erabiltzen ari naiz). Beste modu batean esanda, nik ba*dakit* hiri horiek Errusiakoak direla, baina ez ditut *ezagutzen* fisikoki; jakitea eta ezagutzea ez da gauza bera. Ikusten da ondo ezberdintasuna? Bada, ezberdintasun horretan dute oinarri oso arazo filosofiko sakonek.

Beste adibide bat jartzearren, paradoxa bat aipatuko dugu, lengoaiaren eta metalengoaiaren arteko ezberdintasuna azpimarratzeko. Kasu honetan bai L, bai L_1 lengoaia arruntak dira. Adibide hau *Gezurtiaren paradoxa* deitzen da, eta oso ospetsua izan da filosofiaren historian. **Miletoko Eubulides** filosofo greziarrak proposatu zuen lehenengo aldiz, K. a. IV. mendean. Eta hauxe dugu: “Gezurra diodala esaten badut, zer esaten ari naiz: egia ala gezurra?”. Kasu honetan, oso ondo ikusten da paradoxa: Eubulidesek esaten duena egia bada, orduan esaldia gezurra izan behar da; eta esaten duena gezurra bada, orduan esaldia egia izan behar da. Bi lengoaia-maila nahasten ari dira berriro: L (“gezurra diot”) eta L_1 (“esaten dut”). Horrela planteatuta, paradoxak ez dauka irtenbiderik, autoerreferentziala delako.

Beste era batera aurkez daiteke *Gezurtiaren paradoxa*. Bertsio hau P.E.B. Jourdain matematikariak proposatu zuen, 1913an. Demagun orri bat daukagula; alde bakoitzean, halako mezuak irakur daitezke:

(1)	(2)
Orrialde honen beste aldean agertzen den esaldia *egiazkoa* da	Orrialde honen beste aldean agertzen den esaldia *faltsua* da

Galdera zera da: nolakoak dira (1) eta (2) esaldiak? Egiazkoak ala faltsuak? (1) egia bada, orduan, (2) esaldiaren arabera, (1) faltsua izan beharko da; eta (1) gezurra bada, orduan, (2) esaldiaren arabera, (1) egia izan beharko da. Hau beste paradoxa logiko bat da, eta ematen du denbora-pasa dibertigarria dela, eta bada, baina barruan oso serioak diren aztergai logiko eta filosofikoak ditu.

Azkenik, azter dezagun beste egoera hau: demagun Epimenides izeneko filosofoak, Kretarra denak, zera esaten duela: *"Kretako biztanle guztiek gezurra esaten dute"*. Adibide honetan, Epimenidesek esandako esaldia egia bada, orduan berak, kretarra den neurrian, gezurra esaten du. Beraz, ezin da egia izan, kontraesana edo paradoxa sortzen baita. Baina, bestalde, Epimenidesek esandako esaldia faltsua bada, orduan Kretako biztanle guztiak *ez* dira gezurtiak, eta, hortaz, esaldia egia *izan liteke*. Kasu hau ez da aurreko biak bezalakoa, konplexuagoa da eta, *sensu stricto*, ez da paradoxa, ze, azken buruan, posible da Epimenidesek esandako esaldia gezurra izatea.[3]

Dena den, bi lengoaia-maila daude Epimenidesen paradoxan: lehena, berak esandako esaldia (*L*, komatxoen artean), eta, bigarrena, egoera deskribatzen duena (L_1). Bi lengoaia horiek nahasterakoan (*L*, lengoaia-objektua, eta L_1, metalengoaia) erdi-paradoxa hori sortzen da.

Esan beharra dago horrelako paradoxak, batez ere, lengoaia naturaletan sortzen direla eta, formalizazioaren bidez, nolabait, kontraesan horiek saihesten direla, edo, gutxienez, agerian uzten direla.

Kalkuluak, beraz, lengoaia formalizatuak dira, eta sinbolo artifizialez osatuak daude –kalkulu horren semantika-. Erregela-sistema bat ere badute –kalkulu horren sintaxia–, sinbolo horiek ondo erlazionatzeko. Kalkulu bat estruktura artifiziala da, erlazio-sistema bat, eta bere funtzio nagusia da sinboloekin egindako eragiketetan kontraesangabezia eta zehaztasuna ziurtatzea.

Zientzialariek eraikitakoak dira kalkuluak, eta horien bitartez zehatzago formula daitezke ikertutako objektuen arteko erlazioak; beraz, Logika eta Matematika, kalkuluak diren neurrian, zientzia guztien ardatzak dira. Ikus dezagun zeintzuk diren kalkulu guztien elementu edo osagaiak.

Lehenik eta behin, hiztegia dugu, kalkuluaren alderdi semantikoa, alegia. Kalkulu baten barruan dauden espresioak osatzeko, hainbat sinbolo erabiltzen dira.

[3] Epimenidesen paradoxaren irtenbidea, erraz esanda, horrela litzateke: "Kretar guztiek gezurra esaten dute" esaldiaren kontrakoa da: "Zenbait kretarrek ez dute gezurra esaten". Beraz, posible litzateke Epimenides gezurtia izatea, baina kretarraren bat –batekin nahikoa- egiatia, baina ez bera. (*Cfr*. SUSAN HAACK, *Filosofía de las lógicas*, Cátedra, Madrid, 1982, orr. 158-159).

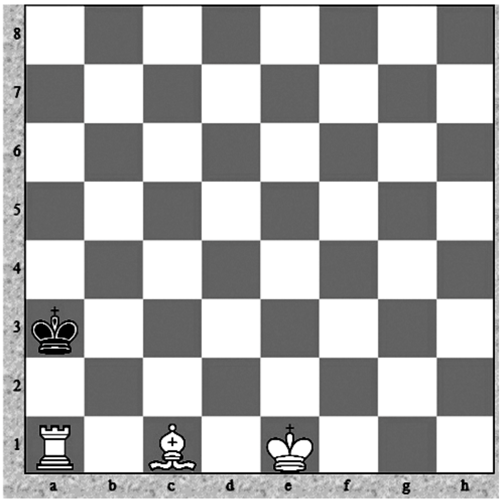
Sinbolo horiek oinarrizkoak dira eta ondo definitu behar dira **sinbolo-sistema** baten bidez. Matematikan oinarrizko sinbolo horiek zenbakiak eta operatzaileak dira: +, -, ˙, /, =, *x*, *y*,… Horiek *konstanteak* izan daitezke (8, +, =), beti gauza bera adierazten dutelako; baina *aldagaiak* ere izan daitezke, haien esanahia aldatzen delako (*x, y, z*). Bestalde, badaude beste sinbolo batzuk, laguntzaileak direnak: parentesiak, kortxeteak...: ( ), [ ], { }.

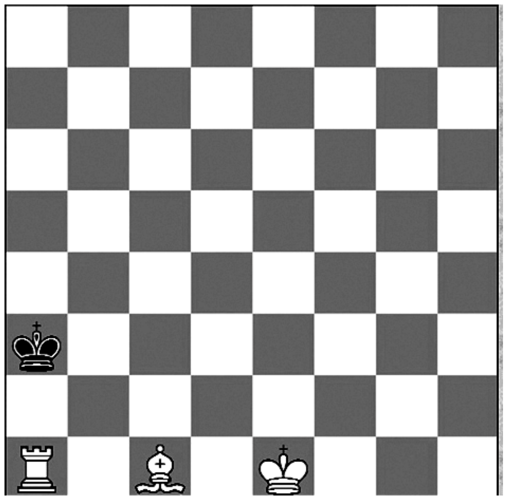
Bigarrenik, gramatika dugu –alderdi sintaktikoa–, sinboloak nola konbinatu behar diren azaltzen duena, hau da, kalkulu baten espresio zuzenak egiteko erregelak ezartzen dituena; **formazio-erregelak** edo eraikitze-erregelak deitzen dira. Erregela horien bitartez jakin dezakegu zeintzuk diren kalkuluaren konbinazio zuzenak, aldez aurretik definitutako sinbolo-sistema batekin egindakoak, alegia; konbinazio zuzen horiek “ondo eraikitako espresioak” (*OEE*) deitzen dira.

Hirugarrenik eta azkenik, **transformazio-erregelak** ditugu. Horiekin, kalkuluaren espresio bat eralda dezakegu, baliokidea den beste espresio bat sortzeko; hasierako espresioa *OEE* bada eta transformazio-erregelak ondo aplikatzen badira, orduan, espresio baliokidea ere *OEE* izango da.

Horrelakoa da xakearen lengoaia. Joko horretan, ondo ikusten dira aipatutako hiru elementu horiek. Lehenik, oinarrizko sinboloak ditugu, hots, jokoaren piezak; esate baterako, zaldia definituta dago xakearen pieza bezala, baina krokodiloa ez; gainera, xakean erabiltzen diren piezek sinbolo-sistema bat osatzen dute. Bigarrenik, formazio-erregelak edo argibideak ditugu, partidaren hasieran piezak non kokatu behar diren zehazteko; eta, piezak erregela horiei erreparatu gabe kokatuz gero, txarto planteatuta egongo da jokoa. Eta, azkenik, transformazio-erregelak ditugu, hau da, xake-taulan zehar piezak nola mugitu behar diren zehazten dutenak.

Erregela horien barruan, xakearen mugimendu posible guztiak definituta daude, eta horiei esker programa dezakegu ordenagailu bat partida bat jokatzeko. Xakearen adibidea aprobetxatuko dugu xakearekin lotutako joko logiko bat aztertzeko. Ikus dezagun ea posible den bukatutako xake-partida batean honelako egoera aurkitzea: xake-klub batean amaitutako partida hau (1) ikusiz gero eta xake-erregelak ezagutuz gero, zera pentsatuko duzu: “Ezinezkoa da horrela bukatzea xake-partida bat; jokalariek horrela bukatu badute, ez dituzte errespetatu erregelak, posizio hori ezinezkoa da-eta. Alfilak eta dorre zuriak, aldi berean egin diote xake errege beltzari; nola liteke hori?”. Eta hala da: dorre zuriak egin badu azken mugimendua, bada, hori egin orduko, alfil zuriak xake egina zion errege beltzari; eta alfil zuriak egin badu, mugitu denerako dorre zuriak xake egina zion erregeari. Beraz, xake-erregelen arabera, posizio hori ezinezkoa da, eta esan dezakegu posizio hori ez dela *OEE* xake-lengoaian.

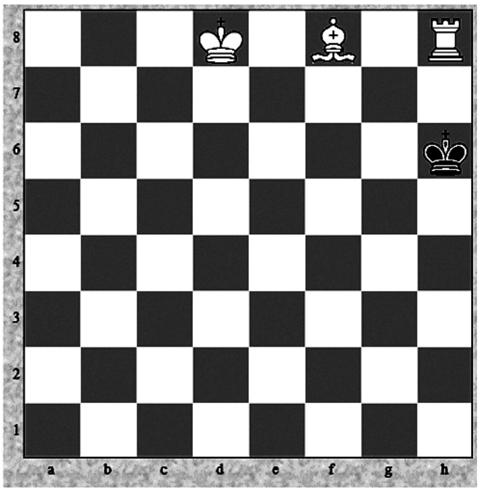
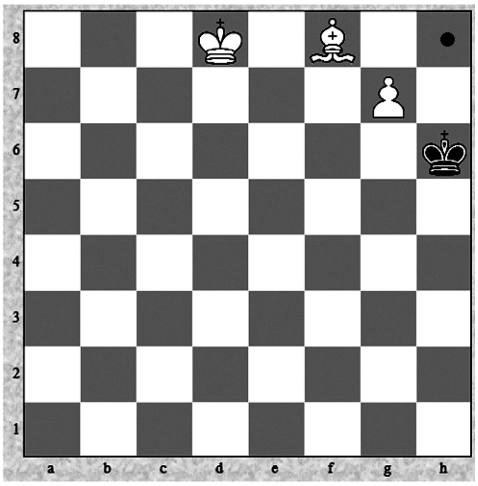
(1) 

(2) 

Hala ere, beste aukera logiko bat ere badago, oso arraroa baina posible dena. Normalean xake-taulek ez dute ez zenbakirik ezta hizkirik ere. Hortaz, guk klub horretan honelako egoera aurkituko genuke: (2).

Posizio hori, berriz, posible da, baldin eta pieza zuriak ez badaude lehenengo lerroan, baizik eta azkenengoan; hau da, xake-taula alderantziz begiratuta. Beraz, xake-erregelak ondotxo dakizkienak eta, aldi berean, logika erabiltzen duenak, adibidez Craig inspektoreak[4], halako posizioa ikusterakoan, berehala konturatuko da xake-partida horren bukaera, oso arraroa bada ere, posible dela. Hobeto ikusteko, taulari buelta eman eta , honela geratuko da (3 eta 4):

[4] Inspektore hori, Craig jauna, Scotland Yardekoa, Smullyan-en *La dama o el tigre* (1989) liburuan agertzen da, 19. orr. Adibidea liburu horretatik hartua da.

(3)  (4) 

(3) posizioak arraro samarra izaten jarraitzen du, baina posible da. Eta Craig inspektoreak, oso argia denez, berehala ikusi du: *h8* koadrotxoan dagoen dorrea peoi bat zen, eta, zortzigarren lerrora heltzerakoan, pieza beltz bat jan eta, auskalo zergatik, dorre bihurtu da (4). Beraz, horrela ikusita, guztiz posible da egoera hori, probable ez bada ere. Digresio txiki honekin bukatu ondoren, jarrai dezagun azaltzen zer den kalkulu logikoa; horren osagaiak aipatu ditugu: sinboloak, formazio-erregelak eta transformazio-erregelak. Baina nola aplikatzen dira hiru osagai horiek proposizio-kalkuluan?

3.- PROPOSIZIO LOGIKA

3.1.- Proposizio-logikaren kalkulua

Logikaren kalkulurik sinpleena eta errazena *enuntziatu*- edo *proposizio-kalkulua* da. Kalkulu horrek–guztiek bezala- gure arrazoibideak aztertzen ditu, eta, jakina, arrazoibide horiek osatzeko, esaldiak erabili behar dira. Proposizio-kalkuluak esaldi horiek blokean hartzen ditu, barruko elementuak analizatu barik. Badago, bestalde, beste kalkulu bat -*predikatu-kalkulua*-, proposizioen barruko elementuak analizatzen dituena.

Proposizio eta *esaldi* kontzeptuak antzekoak dira, baina ez dira berdinak. Lengoaia naturala erabiltzerakoan, hainbat esaldi erabil dezakegu proposizio bat adierazteko. Adibidez, “Euria ari du” proposizioa (*p*) adierazteko, hainbat esaldi erabil dezakegu: “Orain euria ari du”, “Euritsu dago”, “Euria da”, eta abar. Azken buruan, proposizio bat hainbat modutan adieraz dezakegu, baina esanahia bera da. Beraz, argudio baten forma logikoa ateratzeko, proposizioak hartzen dira kontuan, eta ez esaldiak. Proposizio horiek, nahitaez, egiazkoak edo gezurrezkoak izan daitezke, baina ez biak aldi berean. Aurreko adibidean, errealitateari begiratu behar diogu, eta egiten duen eguraldiaren arabera esango dugu zein den horren balioa, egia edo gezurra. Proposizio-kalkuluak *enuntziatu apofantikoak* edo *erazagupen-proposizioak* baino ez ditu aztertzen, hau da, egiazkoak edo faltsuak izan daitezkeenak. Adibidez, “Bihar euria egingo du” esaldia, ez dago proposizio-kalkuluaren barruan, egiazkoa edo faltsua den ezin dugulako jakin.

Logikak argudioen *forma* edo egitura aztertzen du, eta ez *edukia*. Beraz, argudioak aztertzerakoan, egiten duguna zera da: lengoaia naturalaren *analisi logikoa*, hizkuntza arruntetan dauden eskema logikoak ateratzea helburu duelarik. Adibidez, “Rosa polita *eta* ilehoria da”, “Euria ari du *eta* etxean geratuko naiz” edo “Zu oso langilea zara *eta* baita Mikel ere” esaldiek egitura logiko berdina dute, eta haien eskema logikoa hau da: “p *eta* q” (berez, ikusiko dugun bezala, proposizio bera da, esaldiak ezberdinak izan arren)

Naturalki eratzen ditugu argudioak, eta gehienak zuzenak izaten dira, baina, konplexuak direnean, erraz oker gaitezke. Ikus dezagun adibide sinple bat.

“Baldin eta Olga aberatsa eta polita bada, orduan ez da egia aberatsa ez denik edo polita ez denik”

Agerikoa da arrazoibide hau erabat egiazkoa edo zuzena dela, oso sinplea denez txorakeria bat dirudien arren. Eta egiazkoa dena argudioa bera da; proposizioen edukiak ez du zertan izan egiazkoa; hau da, berdin da Olga hori benetan polita den ala ez, edo benetan aberatsa den ala ez. Hori bost axola: edozein kasutan, Olga polita edo itsusia izan ala ez, aberatsa edo pobrea izan ala ez, arrazoibidea zuzena eta guztiz egiazkoa da. Bakarrik hartzen da kontuan argudioaren *forma logikoa*, ez proposizio bakoitzaren benetako edukia edo balioa. Hortaz, arrazoibide zuzenak edo egiazkoak (egiazkoak dira osatzen duten proposizioen balioak aparte utzita) *esakune baliozkoak* edo *tautologiak* deitzen dira.

3.1.1.- Sinboloak

Proposizio-kalkuluan, sinboloak ditugu –kalkuluaren semantika– eta proposizio bakoitza adierazteko hizki bat erabiltzen da, *p* letratik hasita. Beraz, proposizio bat blokean adierazteko, *aldagaiak* erabiltzen ditugu: *p, q, r, s, t,…* Aldagai bakoitza edozein proposizio izan daiteke, eta ez zaigu interesatzen edukia bera: argudioaren eskema logikoa besterik ez dugu bilatzen. Aldagai horiek beti letra xehez adierazi behar ditugu. Gainera, proposizioak edo aldagai horiek uztartu behar ditugu; horretarako, proposizioen arteko erlazio ezberdinak adierazteko, *konstanteak* edo *lokailuak* erabiliko ditugu. Geroago ikusiko dugunez, proposizio-kalkuluan 16 lokailu ezberdin posible daude, baina hemen gure hizkuntza naturalean argudioak osatzeko normalean erabiltzen direnak baino ez ditugu jorratuko.

Lehenik eta behin, bereiz ditzagun “konstante” eta “lokailu” kontzeptuak; lokailu guztiak konstanteak dira, baina ez alderantziz; izan ere, badago konstante bat lokailua ez dena: ukazioa edo ezeztapena. Lokailu guztiek balio dute bi proposizio edo gehiago lotzeko. Adibidez, lokailuak diren konstanteak honako hauek dira:

Lokailuaren izena	**Sinboloa**	**Adibidea lengoaia naturalean**
Konjuntzioa	$p \wedge q$	*“Euria ari du **eta** etxean geratuko naiz”.*
Disjuntzioa	$p \vee q$	*“Liburua irakurtzen dut **edo** ogitartekoa jaten dut”.*
Baldintza edo kondizionala	$p \rightarrow q$	*“Mugitzen **ba**zara, **orduan** hil egingo zaitut”.*
Baldintza bikoitza / baldintzabikoa	$p \leftrightarrow p$	*“**Baldin eta soilik baldin** mugitzen **ba**zara, **orduan** hil egingo zaitut”.*

Bigarrenik, ezeztapena edo ukazioa dugu; konstante bat da, baina, bi proposizio lotzen ez dituenez, ez da lokailua. Kalkuluan, "$\neg$" sinboloa erabiltzen da, eta edozein proposizio ezeztatzeko –adibidez "*Ez* du euria ari"–, derrigorrez erabili behar dugu sinbolo hau: $\neg p$

Eta hirugarrenik, bi adierako espresioak baztertzeko bestelako sinbolo batzuk ditugu: parentesiak, kortxeteak eta giltzak. Adibidez, ez dira gauza bera "$(p \wedge q) \rightarrow p$" espresioa, edo "$p \wedge (q \rightarrow p)$" espresioa. Hortaz, parentesiak ere oso garrantzitsuak dira.

3.1.2.- Formazio-erregelak

Esan bezala, Kalkuluaren bigarren elementua **Formazio-erregelak** dira. Horiek zehazten dute *OEE* zein diren; laburbilduz, hiru dira erregela horiek:

E_1.- Proposizio-aldagai bat *OEE* bat da (p).

E_2.- *OEE* bati ukazioa aurrean jartzen badiogu, ateratzen den espresio berria ere *OEE* da; adibidez, $\neg p$, edo $\neg (\neg p \vee \neg q)$.

E_3.- Bi *OEE* (luzeak badira, *X* eta *Y* deituko diegu) lokailu baten bidez lotuta badaude, $(X \wedge Y)$, $(X \vee Y)$, $(X \rightarrow Y)$ edo $(X \leftrightarrow Y)$, orduan horiek ere *OEE* dira. Adibidez, "$\neg (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$" espresioa *OEE* da, eta $X \rightarrow Y$ forma dauka, ondokoa kontuan hartuz: $X = \neg (p \wedge q)$, eta $Y = (\neg p \vee \neg q)$.[5]

Beraz, lehen aipatu dugun arrazoibidea, *"Baldin eta Olga aberatsa eta polita bada, orduan ez da egia aberatsa ez denik edo polita ez denik",* honela adieraziko genuke proposizio-kalkuluan:

$$(p \wedge q) \rightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)$$

Kontuan hartu behar dugu p eta q aldagaien esanahiak hauek direla: p = "Olga aberatsa da" eta q = "Olga polita da". Proposizio-kalkuluaren espresio hori horrela irakurri behar da: "Baldin eta p eta q, orduan ez da egia ez p edo ez q".

Goian aipatu dugunez, guk, argudioak egiteko, nahitaez –eta proposizio-kalkulua ezagutu gabe– hainbat lege logiko erabiltzen ditugu. Orain, oinarrizkoenak aipatuko ditugu, hain zuzen ere, , Aristotelesek proposatu zituen arrazoiketa zuzenaren legeak. Lau hauek dira:

[5] *"X", "Y" eta "Z"-k* proposizio-kalkuluaren edozein *OEE* adierazten dute. Aldagaiak ere badira, baina zehazten badugu, *meta-aldagaiak* deitu behar diegu. Haiekin, proposizioen aldagaiak aipatzen ditugu. Beraz, metalengoaiaren elementuak dira. Horiek lokailuak berriro definitzen ditugunean erabiliko ditugu.

1.- Identitatearen legea: $p \rightarrow p$ edo $p \leftrightarrow p$
2.- Ukazio bikoitzaren legea: $\neg \neg p \leftrightarrow p$
3.- *Tercio exclusoa*ren legea: $p \vee \neg p$
4.- Ez-kontraesanaren legea: $\neg (p \wedge \neg p)$

Espresio horiek, nolabait, proposizio-kalkuluaren axiomak dira, eta horien arabera garatzen da kalkulu osoa: pellokeriak dira –baina oso garrantzitsuak!–, eta *p* aldagaiari benetako esaldi bat jartzen badiogu, horrela geratzen dira lege horiek:

Demagun *p* proposizio horrek zera adierazten duela: “Goseak nago”. Orduan:

1.- “Goseak banago, orduan goseak nago”.

2.- “Goseak ez nagoela egia ez bada, orduan goseak nago”.

3.- “Goseak nago edo ez nago goseak”.

4.- “Ez da egia goseak nagoela eta aldi berean ez nagoela goseak”.

Lege horien arabera osatzen ditugu argudioak; lege horiek kalkuluaren *OEE* dira, baina horretaz aparte egiazkoak dira, eta, horregatik, *tautologiak* deitzen dira. Gero ikusiko dugu nola frogatu daitekeen egiazkoak direla –hainbat metodo daude horretarako–, baina orain hirugarrenari erreparatuko diogu, *tercio exclusoa*ren legeari. Printzipio horrek adierazten du proposizio-kalkuluaren espresio guztiak edo egiazkoak edo faltsuak direla, hau da, proposizio-logika klasikoa bi baliokoa dela, eta ez dagoela hirugarren balio posiblerik. Hori kontuan hartzea oso inportantea da modu logikoan pentsa dezagun.

3.1.3.- Transformazio-erregelak

Azkenik, proposizio-kalkuluaren hirugarren elementua aipatu behar dugu: **transformazio-erregelak**; horiei esker argudio zuzenak osatzen dira. Baina transformazio-erregelen kopurua amaigabea da, infinitua. Beraz, inportanteenak direnak baino ez ditugu aipatuko, baina ez erregela gisa, lege gisa baizik. Erregelen eta lege logikoen multzoak berdinak dira; kontua da legeak kalkuluaren lengoaian daudela idatzita eta erregelak, berriz, metalengoian. Beraz, guretzat errazagoa izango da erregela horiek lege gisa aurkeztea.

Kalkulu horren beharra eta garrantzia nabarmentzeko, hainbat asmakizun logiko ikusiko ditugu. Smullyan logikariak asmakizun logiko batzuk proposatu ditu Lewis

Carroll-ek asmatutako pertsonaiak erabiliz. Kasu honetan, *Alizia ispiluan zehar* liburutik abiatuta, Ahanztura Basoa aurkezten digu[6]. Baso hau oso-oso berezia da, gauzak ahaztu egiten baitira barruan. Aliziak, basoan sartzean, ez zuen dena ahazten, batez ere, asteko zer egun zen ahazten zuen. Baso horretatik, askotan pasatzen ziren Lehoia eta Adarbakarra, eta biak oso-oso bitxiak ziren. Lehoiak astelehen, astearte eta asteazkenetan gezurra esaten zuen, eta gainerako egunetan, egia; Adarbakarrak, berriz, ostegun, ostiral eta larunbatetan, gezurra, eta gainerako egunetan, egia.

Behin batean, Aliziak Lehoia eta Adarbakarra aurkitu zituen zuhaitz baten azpian atsedena hartzen. Honela esan zioten:

Lehoia: – "Niri atzo zegokidan gezurra esatea".

Adarbakarra: – "Niri ere atzo zegokidan gezurra esatea".

Bi proposizio horiek entzun ondoren, Alizia, oso neska argia zenez, kapaz izan zen zer astegun zen ondorioztatzeko. Zer egun zen?[7]

♠ ♠ ♠ ♠

Aurreko asmakizuna nahiko erreza da logika ondo erabiltzen duenarentzat. Ikus dezagun beste bat:

Beste behin, Aliziak Lehoia bakarrik aurkitu zuen eta honako hau esan zion Aliziari: *(1)* – "Atzo gezurra esan nuen".

(2) – "Hiru egun barru berriro esango dut gezurra".

Zein egunetan gertatu zen hori?[8]

---

[6] SMULLYAN, Raymond, *¿Cómo se llama este libro?*, Cátedra, Madrid, 1981, orr. 57-58.

[7] Leihoak bakarrik esan dezake esaldi hori ("Atzo gezurra esan nuen") astelehen batean (gezurra esanez gero), edo ostegun batean (egia esanez gero). Bestalde, Adarbakarrak esaldi hori ostegun batean esan dezake (gezurra esanez gero) edo igande batean (egia esanez gero). Hortaz, egun batean bakarrik esan dezakete gauza bera, ostegunean; beraz, Aliziak berehala asmatu zuen asteguna osteguna zela.

[8] Lehoiaren lehenengo esaldiak dakar ondorioz asteguna astelehena edo osteguna dela. Bigarrenak, berriz, ez dela osteguna (gainerako egunetan bakarrik esan dezakeelako). Beraz, astelehena izan behar da.

♠ ♠ ♠ ♠

Zein egunetan esan ditzake Lehoiak bi enuntziatu hauek?

(1) – "Atzo gezurra esan nuen".

(2) – "Bihar berriro esango dut gezurra".[9]

♠ ♠ ♠ ♠

Eta azkenik, zailena. Zein egunetan esan dezake Lehoiak esaldi hau:

– "Atzo gezurra esan nuen eta bihar berriro esango dut gezurra".

Oharra: asmakizun horren erantzuna *ez* da aurrekoaren berdina. Oso antzekoak izan arren, bigarrenak bestelako erantzuna dauka, eta erantzun hori, normalean, ez du gure logika naturalak ematen, logika formalak baizik. Kontuan hartu behar da asmakizun horretan enuntziatu bakar bat agertzen dela, eta aurrekoan, bi. Dena den, erantzuna eman aurretik, proposizio-kalkuluaren hainbat kontzeptu nagusi ikusiko ditugu.

3.2.- Proposizio-kalkuluaren egia-taulak

Proposizio-kalkuluan *p, q, r,…* aldagaiek proposizio bana adierazten dute. Halako proposizioei proposizio *atomikoak* deitzen zaie, sinpleak direlako. Baina "$p \wedge q$" espresioa proposizio *molekularra* da, proposizio atomiko bat baino gehiago daukalako. Berdin gertatzen da "$(p \wedge q) \rightarrow p$" espresioarekin; hori ere molekularra da. Eta azken asmakizunean, horrela gertatzen da, espresio molekularra daukagu eta ondo analizatu behar da.

Kalkuluaren edozein espresio edo argudio egiazkoa den ala ez jakiteko, metodo bat erabili behar dugu. Errazena egia-taulak erabiltzea da. Horretarako, konstante bakoitzaren egia-taula jakin behar dugu. Matematikan ondo aritzeko, ekuazioak-eta egiteko, biderketa-taulak jakin behar ditugun bezala, Logikan ere beharrezkoa da egia-taulak ezagutzea.

---

[9] Bi esaldi horiek ezin dira inoiz esan. Lehenengo esaldia Lehoiak astelehenetan eta ostegunetan esan dezake; eta bigarrena bakarrik asteazkenetan eta igandeetan. Beraz, kointzidentziarik ez dagoenez, Lehoiak ezin du bi esaldi horiek egun berean esan.

Ikus dezagun konstante bakoitzaren egia-taula.[10] Proposizioen balioak –egia eta gezurra– “1” eta “0” zenbakiekin adieraziko ditugu. Proposizio-kalkulu tradizionala lengoaia edo sistema *bibalentea* edo *bitarra* da, hots, bi balio besterik ez da kontuan hartzen. Lehenik eta behin, azter dezagun ukazioaren egia-taula. Gogoratu behar da **ukazioa** ez dela lokailua eta ez duela ezer lotzen. Beraz, bi balio posible dauzka kontuan hartzeko:

UKAZIOA	
p	$\neg p$
1	0
0	1

Horrela interpretatuko dugu taula hau: p egia (1) bada, orduan $\neg p$ gezurra (0) izango da. Eta, alderantziz, p gezurra (0) bada, orduan $\neg p$ egia (1) izan behar da.

KONJUNTZIOA		
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Konjuntzioa aztertzerakoan, kontuan hartu behar dugu lokailu bat dela eta bi proposizio lotzen dituela. Beraz, egia-taula egiterakoan, lau aukera sortzen dira. Konjuntzioaren bi proposizioak egiazkoak badira, orduan bien arteko konjuntzioa ere egia da. Baina horietako bat bakarrik, edo biak, gezurra baldin badira, orduan konjuntzioa ezin da egia izan, eta, hortaz, gezurra da.

DISJUNTZIOA		
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Hemen ere, bi proposizio konbinatzen ditugunez lau aukera ditugu. Baina **disjuntzio**-taularen balioak ezberdinak dira; disjuntzioa faltsua da baldin eta soilik baldin p eta q-ren balioak faltsuak badira. Gainerako kasuetan egiazkoa da. Aipatu behar da disjuntzio hau **ez** dela baztertzailea edo elkar-ukatzailea. Horrek esan nahi du irakurtzerakoan modu honetan pentsatu behar dugula: “*p* edo *q*, *edo biak*”. Hala ere, bakarrik esango dugu “*p* edo *q*”. Logikaren arloan disjuntzio honek garrantzi handia dauka, baina lengoaia naturaletan, bestea, baztertzailea dena, gehiago erabili ohi da.[11]

[10] Hemen oinarrizko teoria aurkeztuko dugu, baina kalkulua ondo menperatzeko ariketa batzuk egin behar dira; bai itzulpenak, lengoaia naturaletik lengoaia formalera pasatzeko; bai egia-taulak, espresio bat egiazkoa den ala ez jakiteko. Ariketa horiek egiteko oso baliagarria da *Logika sinbolikoa* liburua, URRUTIA, Peru. Gabirel Jauregi Bilduma, EJAZN, Vitoria-Gasteiz, 2009.

[11] Disjuntzio baztertzaile baten adibide bat: “Bizirik *edo* hilik ekarriko dute”. Kasu honetan bi modutan ezin dute ekarri. Disjuntzio ez-baztertzailearen adibide bat: “Komunistak *edo* faxistak berehala desagertuko dira”. Kasu horretan desager daitezke komunistak, faxistak edo, baita ere, biak aldi berean.

BALDINTZA		
p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Baldintza oso garrantzitsua da, haren bitartez argudioak osatzen direlako. Hala irakurtzen da: "Baldin eta *p*, orduan *q*". Horrek esan nahi du *p* baldintza nahikoa dela *q* ondorioa gertatzeko. Baina *q* gerta daiteke beste arrazoi batengatik, hau da, *p* ez da beharrezko baldintza. "Mugitzen bazara, hil egingo zaitut", esaten badut, orduan aukera bakar bat dago hori faltsua izateko: zu mugitzea eta nik zu ez hiltzea. Gainerako kasuetan, egia da beti. [12]

BALDINTZABIKOA		
p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Baldintzabikoa hala irakurtzen da: "Baldin eta soilik baldin *p*, orduan *q*". Baldintzabikoa egiazkoa da baldin eta soilik baldin bi proposizioak –bai aurrekaria, bai ondorioa– balio berdinekoak badira. Gainerako kasuetan faltsua da. Beraz, esaten badut: "Baldin eta soilik baldin mugitzen bazara, orduan hil egingo zaitut", orduan zu mugitzea beharrezko baldintza da nik zu hiltzeko. Hortaz, hirugarren aukerari erreparatuko diogu: ez bazara mugitu, eta nik hil egin bazaitut, orduan baldintzabikoa gezurra da.

Egia-taula horiek buruz jakin behar dira arrazoibide luzeak analizatzeko. Azter dezagun lehen aipatutako argudioa:

"Baldin eta Olga aberatsa eta polita bada, orduan ez da egia aberatsa ez denik edo polita ez denik", hau da, "$(p \wedge q) \to \neg (\neg p \vee \neg q)$".

Espresio hori egiazkoa den ala ez jakiteko, egia-taula egingo dugu, modu honetan:

Lehenik eta behin, ikusi behar dugu zenbat proposizio atomiko dauden. Kasu honetan bi dira: *p* (Olga aberatsa da) eta *q* (Olga polita da). Horren arabera, eta kontuan hartuz bi balio posible direla (egia eta faltsua), 4 aukera (2^2) izango ditugu egia-taularen bidez analizatzeko:

[12] Taularen hirugarren kasua deigarriagoa da: *p* faltsua izan, *q* egia, eta baldintza egia. Beraz, adibideari jarraituz, zu ez zara mugitu, baina nik hil egin zaitut. Dena den, posible da, zeren hil egin ahal zaitut beste arrazoi batengatik, esate baterako, itsusia izateagatik, baina ez mugitzeagatik. Edozein kasutan, jarritako baldintza egiazkoa izaten jarraitzen du: zu mugituz gero, nik zu hil egingo zaitut.

p	*q*	$(p \wedge q) \rightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)$
1	1	
1	0	
0	1	
0	0	

Konjuntzioaren egia-taula erabiliz, horrela hasiko gara betetzen:

p	*q*	$(p \wedge q) \rightarrow \neg (\neg p \vee \neg q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Espresio osoa baldintza bat da, lokailu nagusia baldintzaren sinboloa (“→”) da-eta. Konjuntzioaren egia-taula egin ondoren, baldintzaren lehenengo zatia egina dugu, hau da, aurrekaria. Ikus dezagun orain baldintzaren ondorioa: multzo ezeztatua da. Lehenengo, multzo horren barrukoa ebatzi behar dugu: disjuntzio bat da; baina disjuntzio horren proposizio atomikoak ezeztatuak daude. Hori adieraziko dugu, haien balioak aldatuz:

p	*q*	$(p \wedge q) \rightarrow$	$\neg (\neg p$	$\vee \neg q)$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	1	0	1	0
0	0	0	1	1

Gero, $\neg$ *p* eta $\neg$ *q*-ren arteko disjuntzioa egin behar da:

p	*q*	$(p \wedge q)$	$\to$	$\neg$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
1	1	1			0	**0**	0
1	0	0			0	**1**	1
0	1	0			1	**1**	0
0	0	0			1	**1**	1

Ondoren, parentesi horren emaitza ezeztatu:

p	*q*	$(p \wedge q)$	$\to$	$\neg$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
1	1	1		**1**	0	0	0
1	0	0		**0**	0	1	1
0	1	0		**0**	1	1	0
0	0	0		**0**	1	1	1

Behin baldintza horren ondorioaren emaitza lortuta, baldintza nagusia egitea baino ez zaigu falta:

p	*q*	$(p \wedge q)$	$\to$	$\neg$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
1	1	1	**1**	1	0	0	0
1	0	0	**1**	0	0	1	1
0	1	0	**1**	0	1	1	0
0	0	0	**1**	0	1	1	1

Lokailu nagusia dagokion zutabean ateratzen diren balio guztiak “1” badira, orduan analizatu dugun espresioa egiazkoa edo baliozkoa da. Eta esan dezakegu espresio hori, proposizio-kalkuluaren barruan, legea edo **tautologia** dela. Horrek esan nahi du espresio horren aldagaiei edozein balio emanda –kasu horretan, lau posibilitate daude– beti egia ateratzen dela. Beste posibilitate bat da emaitzan “1” eta “0” agertzea. Kasu horretan, analizatu dugun espresioari **indeterminazioa** deitzen diogu. Eta hirugarren eta azken posibilitatea da emaitzaren zutabean “0” besterik ez agertzea. Orduan espresio horri **kontraesana** deitzen diogu.

Gauzak horrela, azter ditzagun atal honen hasieran aipatu ditugun axiomak:

1.- Identitatearen legea:	$p \rightarrow p$ edo $p \leftrightarrow p$
2.- Ukazio bikoitzaren legea:	$\neg \neg p \leftrightarrow p$
3.- *Tercio exclusoa*ren legea:	$p \vee \neg p$
4.- Ez-kontraesanaren legea:	$\neg (p \wedge \neg p)$

Lau kasu horietan, espresio bakoitzean bakarrik proposizio bat agertzen da: “p”. Beraz, bi aukera besterik ez dugu analizatzeko (2^1).

Egin dezagun, adibidez, laugarrenaren egia-taula:

p	$\neg$	(p	$\wedge$	$\neg$ p)
1	**1**	1	0	0
0	**1**	0	0	1

Hemen, bi balio posible zeukan *p* proposizioak. Gero $\neg$ *p* agertzen denean, *p*-ren balioak ezeztatu, eta parentesiaren konjuntzioa egin behar da. Azkenik, parentesiaren ukazioa egingo dugu. Emaitzaren zutabean –kasu horretan parentesiaren aurrean dagoen ukazioan–“1” ateratzen da bi aukeretan; beraz, espresioa tautologia da. Proposizio-kalkuluaren lege guztiak tautologiak dira, eta aipatutako axioma horiek, pellokeriak badira ere, baita ere.

Esan dugunez, proposizio bakar bat (*p*) agertzen bada analizatu nahi dugun espresioan, bi aukera analizatu behar ditugu egia-taula egiterakoan. Bi proposizio agertzen badira (*p* eta *q*), lau aukera daude analizatzeko. Baina hiru (*p*, *q*, eta *r*) edo gehiago badira, nola jakin zenbat aukera analizatu behar dugun? Egia-balioak beti dira bi: egia eta faltsua, 1 eta 0. Beraz, proposizio-kopurua *n* bada, honelako formula daukagu egia-taularen aukerak zenbat diren jakiteko: 2^n. Aldagai edo proposizio bakarra badugu (*p*), orduan 2^1=2 aukera; bi badira, orduan 2^2=4; hiru badira, orduan 2^3=8; *n* badira, orduan 2^n.

Baldintzaren egia-taula egiterakoan, beharbada hirugarren aukera hura (0-1) arraroa iruditu zaizu. Ikus dezagun orain argudio bat, oso engainagarria dena:

“Mugitzen bazara, hil egingo zaitut; hil egin zaitut. Hortaz, mugitu zara”.

Agian, argudio hori zuzena dela ematen du. Izan ere, egitura hori askotan erabiltzen da, zuzena dela pentsatuz. Hala bada, egia-taula egiterakoan, beti “1” atera behar da. Ikus dezagun:

Argudio horren eskema logikoa honako hau da:

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

Kontuan izanda, *p* = zu mugitzea
q = nik zu hiltzea

p	*q*	[(p → q)	∧	q]	→	p
1	1	1	1	1	**1**	1
1	0	0	0	0	**1**	1
0	1	1	1	1	**0**	0
0	0	1	0	0	**1**	0

Emaitza ikusita, konturatzen gara zutabe nagusi horren balioak “1” eta “0” direla. Beraz, espresioa, –eta horrek adierazten duen argudioa–, ez da tautologia, ez da zuzena arrazoibide bezala. Indeterminazio bat da.

Egia-taularen metodoa egokia da, baina, 4 aldagai edo gehiago agertzen badira, oso luzea eta korapilatsua izan daiteke. Kalkula ezazu zenbat aukera analizatu beharko genukeen 5 aldagai dauzkan espresio batekin: 32 aukera (2^5). Dena den, badago beste metodo bat hain neketsua ez dena, eta geroago ikusiko duguna (absurdoaren bidezko metodoa). Azter dezagun orain hiru proposizioko argudio bat:

“Baldin eta larunbatetan nekatuta edo triste banago, orduan etxean geratzen naiz; eta egia esan, gaur, larunbata, nekatuta nago. Beraz, etxean geratuko naiz”.

Hauek dira hiru proposizioak: *p* = larunbatean nekatuta egotea.
q = larunbatean tristea egotea.
r = larunbatean etxean geratzea.

Argudio baten eskema logikoa ateratzeko, puntuazioa eta hainbat espresio berezi hartu behar dira kontuan. Puntu edota puntu eta koma agertuz gero, normalean konjuntzio batekin adierazten da. Eta “beraz” edo “hortaz” hitzak agertzeak adierazten du baldintza baten aurrekaria bukatu dela eta ondorioa datorrela.

Hona hemen argudio horren eskema logikoa, eta bere egia-taula:

p	*q*	*r*	$\{[(p \vee q) \rightarrow r] \wedge p\} \rightarrow r$						
1	1	1	1	1	1	1	1	**1**	1
1	1	0	1	0	0	0	1	**1**	0
1	0	1	1	1	1	1	1	**1**	1
1	0	0	1	0	0	0	1	**1**	0
0	1	1	1	1	1	0	0	**1**	1
0	1	0	1	0	0	0	0	**1**	0
0	0	1	0	1	1	0	0	**1**	1
0	0	0	0	1	0	0	0	**1**	0

Egia-taula egin ondoren, ikus dezakegu tautologia dela, eta, beraz, argudioa baliozkoa da. Itzul gaitezen, orain, egiteke utzi dugun asmakizunera, Alizia Lehoiarekin eta Adarbakarrarekin Ahanztura Basoan zegoenekora:

Zer egunetan esan dezake Lehoiak esaldi hau:

– “Atzo gezurra esan nuen *eta* bihar berriro esango dut gezurra”.

Esaldia aztertzerakoan, gogoan hartu behar dugu konjuntzio bat dela eta bere eskema logikoa “$p \wedge q$” dela. Eta orain, lokailuen egia-taulak azaldu ondoren, badakigu konjuntzio bat soilik dela egia haren bi elementuak (bai *p*, bai *q*) egiazkoak direnean; gainerako kasuetan, faltsua da. Beraz, “$p \wedge q$” egia bada, bi elementuak egiazkoak izan behar dira, eta Lehoiak ostegun, ostiral, larunbat edo igande batean esan behar du. Baina analizatzen badugu, ez da posible Lehoiak enuntziatu hori esatea egia esaten duen egunetan; beraz, baztertu behar ditugu osteguna, ostirala, larunbata eta igandea. Hortaz, esatekotan, beste egun batean esan behar du eta enuntziatua gezurra izango da. Baina konjuntzio bat gezurra izateko ez da derrigorrezkoa bi elementuak gezurra izatea; nahikoa da bat gezurra izatea. Beraz, astelehena izanez gero, orduan *p* faltsua da, eta *q* egia (eta konjuntzioa faltsua); asteartea izatekotan, biak (*p* eta *q*) egiazkoak dira, eta hori ez da posible, Lehoiari egun horretan gezurra esatea dagokiolako; eta, azkenik, asteazkena izatekotan, *p* egiazkoa da, eta *q* faltsua (eta konjuntzioa faltsua). Honenbestez, ondorio gisa, esan behar dugu Lehoiak enuntziatu hori esan dezakeela **astelehen** edo **asteazken** batean.

Agerikoa da asmakizuna ez dela hain erraza eta, irtenbidea aurkitzeko, komeni dela proposizio-logikari buruz zer edo zer jakitea.

Ikus ditzagun beste asmakizun batzuk, nahiko errazak eta interesgarriak.

Alizia, *Herrialde Harrigarrian* dagoela, Zaldunen eta Ezkutarien Uhartetik pasatu da. Uharte horrek oso biztanle bitxiak dauzka, eta biztanle guztiak edo zaldunak edo ezkutariak dira: ez dago besterik. Eta ezaugarririk garrantzitsuena: zaldunek beti esaten dute egia, eta ezkutariek, ordea, beti gezurra.

Behin, Uharte horretako hiru biztanle (A, B eta C) lorategi batean zeudela, handik atzerritar bat pasatu eta honela galdetu zion A-ri: *"Zu, zalduna ala ezkutaria zara?"*. A-k oso era ilun eta nahasgarrian erantzun zion, eta atzerritarrak ez zion ulertu. Beraz, B-ri galdetu zion: "*Zer demontre esan du A-k?*". Eta B-k erantzun zion: *"A-k esan du ezkutaria dela"*. Baina une horretan bertan, hirugarren biztanleak, C-k, esan zion: "*Ez sinetsi B-k esandakoa, gezurretan dabil eta!*". Galdera da: zer dira B eta C?[13]

♠ ♠ ♠ ♠

Erantzuna ezagutu ondoren, konturatzen gara aurreko ariketan C-k ez duela betetzen funtzio berezirik. Ikus dezagun beste egoera hau: demagun orain atzerritarrak galdera hau egiten diola A-ri: *"Zenbat zaldun daude zuen artean?"*. Berriro ere, A-k oso modu nahasian erantzuten dio. Orduan, atzerritarrak B-ri galdetzen dio: "*Zer demontre esan du A-k?"*. Eta B-k erantzun*: "A-k esan du gure artean zaldun bat besterik ez dagoela"*. Eta C-k, hori entzun ondoren, dio: *"Ez sinetsi B-ri, gezurretan dabil eta!". Zer dira B eta C?*[14]

[13] Planteatu behar dugu B-k esandakoa egia den ala ez. B-k esan du A ezkutaria dela esan duela. Baina ezinezkoa da Uharte horretako biztanle batek esatea: "Ni ezkutaria naiz". Benetako ezkutaria bada, orduan egia esaten ari da; eta zalduna bada, orduan gezurra esaten ari da. Bi kasuetan kontraesan bat agertzen zaigu. Hortaz, B gezurra esaten ari da derrigor eta ezkutaria da. C, kontrakoa esaten duenez, zalduna da.

[14] Hemen berriro dira ezberdinak B eta C, kontrakoa esaten dutelako. Azter dezagun egoera: B-k, zalduna bada, egia esaten du. Baina kasu horretan A zalduna edo ezkutaria izan daiteke. A zalduna balitz, bi zaldun izango lirateke (A eta B) eta B-k esandakoa gezurra litzateke; eta A ezkutaria balitz, egia

♠ ♠ ♠ ♠

Oraingo honetan, bi biztanle baino ez daude, A eta B. A-k dio: “*Gutxienez gutako bat ezkutaria da*”. Zer dira A eta B?[15]

♠ ♠ ♠ ♠

Demagun A-k dioela: *“Ni ezkutaria naiz edo B zalduna da”*. Zer dira A eta B? (Hemen disjuntzioaren egia-taula hartu behar da gogoan).[16]

♠ ♠ ♠ ♠

Orain, demagun A-k dioela: *“Ni ezkutaria naiz edo 2 + 2 = 5”*. Zer ondorio aterako zenuke?[17]

♠ ♠ ♠ ♠

Berriro, hiru biztanle topatzen ditugu, A, B eta C. A-k eta B-k horrela esaten dute:

A: – “Guztiok gara ezkutariak”.

B: – “Gutako bat, eta soilik bat, da zalduna”.

---

esango luke (esaterakoan zaldun bat besterik ez dagoela), eta hori ez da posible. Beraz, B-k gezurra esaten du eta ezkutaria da; eta C, kontrakoa dioenez, zalduna da.

[15] A ezkutaria izanez gero, orduan egia esango luke, eta hori ezinezkoa da. Beraz, A ezin da ezkutaria izan, eta zalduna da. Zalduna denez, egia esaten du, eta haietako bat ezkutaria dela esaten duenez, orduan bestea, B, ezkutaria izan behar da.

[16] Arazo hau ondo asmatzeko disjuntzioaren egia-taula jakin behar da, bestela nahiko zaila da. Guk jakin badakigu bi proposizioen arteko disjuntzioa bakarrik dela faltsua biak faltsuak direnean. Eta A-k dioena disjuntzio bat da: “$p \vee q$”. Beraz, A ezkutaria bada, bai p (“ni ezkutaria naiz”), bai q (“B zalduna da”) gezurrak izan behar dira. Baina kasu horretan p egia izango litzateke, bera suposizio horretan ezkutaria delako. Hortaz, A ezin da ezkutaria izan; zalduna da eta esaten duen esaldia ($p \vee q$) egia da: lehenengo zatia (p) gezurra, baina bigarrena (q) egia. Beraz, B ere zalduna da, disjuntzioaren bigarren zatiaren arabera.

[17] Esaldi hori kontraesan bat da, eta ezin izan du esan ez zaldun batek ezta ezkutari batek ere. Ikus dezagun zergatik. Esaldia disjuntzio bat da (“$p \vee q$”). Zaldun batek ezin du esan zeren eta bai lehenengo zatia (p), bai bigarrena (q) gezurrak dira. Eta ezkutari batek ezin du esan: gezurra izan beharko litzateke eta lehenengo zatia (p) kasu horretan egia izango litzateke.

Zer dira A, B eta C?[18]

♠ ♠ ♠ ♠

Orain, demagun hiru biztanle horiekin egiten dugula topo, eta A-k eta B-k egiten dutela berba:

A: –"Guztiok gara ezkutariak".

B: –"Gutako bat, eta soilik bat, da ezkutaria"

Zehaztu daiteke zer den B? Eta zehaztu daiteke zer den C?[19]

♠ ♠ ♠ ♠

Demagun, orain, A-k dioela: *"Ni ezkutaria naiz, baina B ez da ezkutaria"*.

Zer dira A eta B? (Hemen konjuntzioaren egia-taula hartu behar da gogoan).[20]

♠ ♠ ♠ ♠

Proposizio-kalkulua azaltzerakoan esan dugu 16 lokailu posible daudela. Guk lau besterik ez dugu ikusi: konjuntzioa ($\wedge$), disjuntzioa ($\vee$), baldintza ($\rightarrow$) eta baldintzabikoa ($\leftrightarrow$). Ukazioa konstantea bada ere, ez da lokailua. Baina, orain, ikus dezagun kalkuluan zenbat lokailu posible ateratzen diren, haien egia-taulari so eginez:

[18] A ezkutaria izan behar da. Zalduna balitz, gezurra esango luke. Beraz, badakigu A ezkutaria dela eta hirurak ezin direla ezkutariak izan. B ezkutaria izanez gero, orduan egia esango luke, zaldun bat besterik ez dagoela esaterakoan, hau da C. Beraz, B ezin da ezkutaria izan: zalduna da. Eta egia esaten duenez, zaldun bakarra bera da eta C ezkutaria da.

[19] A ezkutaria izan behar da, zaldun batek ezin duelako esaldi hori esan. Beraz, hirurak ezin dira ezkutariak izan eta haien artean, gutxienez, zaldun bat egongo da. B izan daiteke zalduna edo ezkutaria. B zalduna bada, C zalduna izan behar da, ezkutari bakarra A delako; eta B ezkutaria bada, orduan ezkutari bat baino gehiago egon behar dira (A eta B), baina ez hirurak eta C zalduna izango da. Beraz, B zer den ezin dugu zehaztu, baina, edozein kasutan, C zalduna da.

[20] Hemen dugu konjuntzioaren adibide on bat. A-k esandako esaldiak eskema logiko hau dauka: "$p \wedge q$", hau da, "Ni ezkutaria naiz eta B ez da". Badakigu konjuntzio bat egia izateko, bi elementuak, bai p, bai q, egia izan behar direla. Beraz, A zalduna bada, biak egia izan behar dira, baina lehenengoa (p) ez da egia. Beraz, A ezin da zalduna izan, ezkutaria da. Ezkutaria izanda, bere esaldiaren lehenengo zatia (p) egia da; orduan bigarrena (q) gezurra izan behar da, konjuntzio osoa gezurra izateko. Eta q hori gezurra bada, B ezkutaria da.

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0

Taula horretako zutabe bakoitzak lokailu baten egia-taula adierazten du. Kalkuluan, bi proposizio (p eta q) lotzerakoan, 16 egia-taula posible daudenez, posibleak diren lokailuak ere 16 dira. Adibidez: 15. zutabean konjuntzioarena ($\wedge$) dago; 5.ean, disjuntzioarena ($\vee$); 3.ean, baldintzarena ($\rightarrow$), eta 9.ean, baldintzabikoarena ($\leftrightarrow$). Bost horiek dira arruntenak, eta gure argudioak egiterakoan erabiltzen ditugun lotura logikoak adierazten dituzte. Dena dela, gainerakoek ere garrantzi handia dute proposizio-kalkuluan. Adibidez, gero ikusiko dugun bezala, badaude bi lokailu oso garrantzitsuak direnak, horietako edozein erabilita kalkuluaren espresio guztiak berriro definitu ditzakegulako. Horiek dira Sheffer-en barra ($p \mid q$) –2. zutabean agertzen dena – eta gezi-funtzioa edo disjuntzioaren ukazioa ($p \downarrow q$) –12. ean agertzen dena–.

3.3- Proposizio-kalkuluaren legeak

Lehenago aipatu dugu kalkuluaren legeak tautologiak deitzen direla. Lege horiek arrazoibide zuzenak edo baliozkoak adierazten dituzte, eta horien egia-taulak egiterakoan ikusiko dugu emaitza guztietan beti “1” ateratzen dela. Eta agertzen diren aldagaietan (p, q, r…) edozein proposizio jarriz gero, osatzen den argudioa guztiz koherentea da ikuspuntu logikotik. Jarraian agertzen diren legeak dira garrantzitsuenak. Lege horiek egia-taulak eta absurdo bidezko metodoa erabilita landuko ditugu, tautologiak direla demostratzeko eta, baita ere, birdefinizioak nola egiten diren azaltzeko. Tautologia kopurua infinitua da, eta kopuru infinitu horretatik batzuk oso baliagarriak dira argudio deduktiboak egiteko. Tautologia baliagarri horiek proposizio-kalkuluaren **legeak** edo **teoremak** dira. Honako hauek dauzkagu:

1* Identitatearen legea:

$$p \rightarrow p$$

2* Ukazio bikoitzaren legea:

$$\neg \neg p \rightarrow p$$

3* *Tercio exclusu*aren legea:

$$p \vee \neg p$$

4* Ez-kontraesanaren legea:

$$\neg (p \wedge \neg p)$$

5* Morgan-en legeak:

A) $\neg (p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

B) $\neg (p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

6* Absurdo bidezko legea:

$$[\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)] \rightarrow p$$

7* Konmutazioaren legea:

A) $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

B) $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

C) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (q \leftrightarrow p)$

8* Asoziazioaren legea:

A) $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

B) $[(p \vee q) \vee r] \rightarrow [p \vee (q \vee r)]$

C) $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \rightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$

9* Transposizioaren legea:

A) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

B) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$

10* Lege distributiboak:

A) $[p \wedge (q \vee r)] \rightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

B) $[p \vee (q \wedge r)] \rightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

C) $[p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$

D) $[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$

11* Permutazioaren legea:

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

12* Silogismoaren legea:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$$

13* Baldintza bikoitzaren legea:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

14* Hedapenaren legeak:

A) $(p \rightarrow q) \rightarrow [p \leftrightarrow (p \wedge q)]$

B) $(p \rightarrow q) \rightarrow [q \leftrightarrow (p \vee q)]$

15* Modus ponendo ponens:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

16* Modus tollendo tollens:

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$$

Arreta jarriz gero, lege gehienetan “$\rightarrow$” sinboloa (baldintza) agertzen da, lokailu nagusi bezala. Horren ordez baldintzabikoa ($\leftrightarrow$) ere jar daiteke. Sinbolo horrek, nolabait, berdintasuna adierazten du eta Matematikako “ = ” sinboloarekin pareka daiteke. Gainera, baldintzaren lehenengo zatiari egia-taula eginez gero, bigarren zatiaren emaitzaren berdina izango da.

3.4.- Absurdoaren bidezko metodoa

Har dezagun orain Kimikako lege bat eta ikus dezagun zein den bere forma logikoa eta forma logiko hori zuzena den ala ez:

“Bi gasek tenperatura berdina badute, orduan bere molekulek energia zinetiko berdina dute. Gainera, bi gasen bolumena berdina bada, orduan molekula kopuru berdina daukate. Halaber, bi gasen presioak berdinak dira, baldin eta haien molekula kopurua eta haien energia zinetikoa berdinak badira. Beraz, aurreko guztia horrela izanik, bi gasek tenperatura berdina eta bolumen berdina badute, haien presioa ere berdina izango da”.

Atera ditzagun dauden proposizioak:

p = bi gasen arteko tenperatura berdina da.

q = molekulek energia zinetiko berdina dute.

r = bi gasen arteko bolumena berdina da.

s = molekula kopurua berdina da.

t = bi gasen arteko presioa berdina da.

Aldagaiak identifikatu ondoren, eskema logikoa atera behar dugu:

$$\{ (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge [(s \wedge q) \rightarrow t] \} \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow t]$$

Espresio hau arrazoibide zuzena den ala ez jakiteko, ez du merezi egia-taulak erabiltzea. Bost aldagai ezberdin ditugu eta tautologia den ala ez jakiteko 32 lerroko egia-taula bat behar dugu: $2^5=32$. Beraz, bigarren metodo bat proposatuko dugu: absurdoaren bidezko metodoa. Metodo hori oso sinplea da, baina bakarrik balio du espresio bat tautologia den ala ez jakiteko; baina, tautologia ez bada, ezin dugu jakin indeterminazioa edo kontraesana den.

Metodo honek 6* legea hartzen du abiapuntutzat:

$$[\neg X \rightarrow (Y \wedge \neg Y)] \rightarrow X$$

Eta X-k edo Y-k edozein proposizio molekular adierazten dute. Metodo horren arabera, guk suposatu behar dugu analizatzeko daukagun espresioa (X) faltsua dela ($\neg$ X). Hori suposatu ondoren, kontraesan batera heltzen bagara (Y $\wedge$ $\neg$ Y), orduan horrek esan nahi du hasierako suposizioa ez dela egia ¬ (¬ X). Beraz ,"¬ X" ez bada egia, orduan gezurra da, hau da, gezurra da gure hasierako suposizioa eta, beraz, X egia da.

Egin dezagun orain:

$$\underbrace{\{ (p \to q) \wedge (r \to s) \wedge [(s \wedge q) \to t] \} \to [(p \wedge r) \to t]}_{0}$$

Espresioaren azpian "0" jarriz gero, hasierako suposizioa adierazten ari gara, hau da, espresio hori gezurra dela. Ea zer gertatzen den: espresioa baldintza bat denez, baldintza osoa gezurra bada, orduan aurrekaria –giltzen artean dagoena– egia izan behar da, eta ondorioa –baldintzaren atzealdean dagoena–, gezurra. Eta horrela markatuko dugu:

$$\underbrace{\underbrace{\{ (p \to q) \wedge (r \to s) \wedge [(s \wedge q) \to t] \}}_{1} \to \underbrace{[(p \wedge r) \to t]}_{0}}_{0}$$

Gero, baldintzaren ondorioarekin jarraitu behar dugu. Baldintza bat denez, eta aldi berean gezurra, kasu bat besterik ez dago gezurra izateko (1-0). Horren arabera, suposatuko dugu "$(p \wedge r)$" egia dela, eta "t" gezurra:

$$\underbrace{\underbrace{\{ (p \to q) \wedge (r \to s) \wedge [(s \wedge q) \to t] \}}_{1} \to \underbrace{[\underbrace{(p \wedge r)}_{1} \to \underbrace{t}_{0}]}_{0}}_{0}$$

Orain, “(p $\wedge$ r)” hartuko dugu: egiazkoa eta konjuntzioa da. Hortaz, konjuntzio horren bi aldagaiak egia izan behar dira; ez dago beste aukerarik:

$$\{ (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge [(s \wedge q) \rightarrow t] \} \rightarrow [(p \ \wedge \ r) \ \rightarrow \ t]$$

1 1

1 0

1 0

0

Horrela, *p*, *r* eta *t* aldagaien balioak lortu ditugu: $p = 1$; $r = 1$ eta $t = 0$. Orain, balio horiek baldintzaren lehenengo zatian ordezkatu behar ditugu, hau da, baldintzaren aurrekarian:

$$\{ (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge [(s \wedge q) \rightarrow t] \} \rightarrow [\ (p \wedge r) \rightarrow t]$$

1 1 0 1 1

1 0

1 0

0

Baldintzaren aurrekariak –giltzen artean dagoena– eskema logiko hau dauka: (X $\wedge$ Y $\wedge$ Z). Eta hori hiru proposizioko konjuntzioa da; beraz, egia izateko, zati guztiak egia izan behar dira:

1 1 1

$$\{ \overline{(p \rightarrow q)} \ \wedge \ \overline{(r \rightarrow s)} \ \wedge \ \overline{[(s \wedge q) \rightarrow t]} \} \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow t]$$

1 1 0 1 1

1 0

1 0

0

Orain, falta zaizkigun aldagaien balioak jarri behar ditugu. Balioak ematerakoan denak bat badatoz, orduan hasieran suposatu duguna (espresioa faltsua dela, hau da, ez dela tautologia) egia izango da. Baina kontraesanen bat aurkitzen badugu, orduan guk suposatutakoa gezurra izango da, eta, beraz, espresioa ez da izango tautologia. Ikus dezagun: orain arte, gure suposizioaren arabera, honako balio hauek ditugu:

p = 1; *r* = 1; *t* = 0

eta falta zaigu *q*-ren eta *s*-ren balioak jakitea.

Lehenengo parentesian "(p → q)", *q*-ren balioa ezin da gezurra izan, zeren eta orduan parentesi osoaren balioa faltsua aterako litzateke; beraz, *q*-ren balioa egia izan behar da:

1 1 1

$$\{\, (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge [\, (s \wedge q) \rightarrow t \,] \,\} \rightarrow [(p \wedge r) \rightarrow t]$$

1 1 1 0 1 1

1 0

1 0

0

Bigarren parentesian, *s*-ren balioarekin gauza bera gertatzen da: ezin da faltsua izan, zeren eta orduan parentesiaren balioa gezurra izango litzateke, eta egia atera behar da.

1 1 1

$$\{\, (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge [\, (s \wedge q) \rightarrow t \,] \,\} \rightarrow [\, (p \wedge r) \rightarrow t]$$

1 1 1 1 0 1 1

1 0

1 0

0

Eta, gauzak horrela, baditugu aldagai guztien balioak:

p = 1; *q* = 1; *r* = 1 *s*= 1 *t* = 0

Beraz, lehenengo kortxetean, *q*-ren eta *s*-ren balioak ordezkatu behar ditugu:

$$\{\overbrace{(p \to q)}^{1} \wedge \overbrace{(r \to s)}^{1} \wedge \overbrace{[\,(s \wedge q) \to t\,]}^{1}\} \to [(p \wedge r) \to t]$$

1 1 1 1 1 1 0 1 1

1 0

1 0

0

Eta, kortxete horretan, kontraesan bat sortzen da: kortxete osoko balioa egia izan beharko litzateke gure hasierako suposizioaren arabera, baina aldagaien balioak ordezkatu ondoren, kortxete horren balioa –baldintza da– gezurra da:

$$\{\overbrace{(p \to q)}^{1} \wedge \overbrace{(r \to s)}^{1} \wedge \overbrace{[\,(s \wedge q) \to t\,]}^{1}\} \to [(p \wedge r) \to t]$$

1 1 1 1 1 1 0 1 1

1 1 0

0

1 0

0

Beraz, kontraesana topatu dugu, eta hasierako suposizioa ez da egia, hau da, ez da frogatu gezurrezkoa denik; hortaz, egiazkoa da, hau da, tautologia.

Ikus dezagun orain tautologia ez den espresio bat, metodo hau erabiliz. Espresio hau dagoeneko egina dugu, baina egia-taulen bidez:

$$[(p \to q) \wedge q] \to p$$

Demagun, absurdoaren bidezko metodoaren arabera, espresio osoa gezurra dela:

$$\underset{0}{\underline{[(p \to q) \wedge q] \to p}}$$

Horren arabera, baldintzaren lehenengo zatia (aurrekaria, kortxetean dagoena) egia izan behar da, eta bigarrena (ondorioa, *p* proposizioa) gezurra:

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

1 0

0

Beraz, gure suposizioa kontuan izanda, *p*-ren balioa lortu dugu: *p* = 0. Orain azter dezagun baldintza nagusiaren aurrekaria, kasu honetan kortxetean dagoen konjuntzio bat. (X ∧ Y) egitura logikoa duenez, egia izateko, bi elementuak egia izan behar dira derrigor. Honela adieraziko dugu:

$$[(p \rightarrow q) \;\wedge\; q\,] \rightarrow p$$

1 1

1 0

0

Behin *q*-ren balioa (*q* = 1) lortuta, azken pausoa da parentesiaren barruan dauden bi proposizio atomikoak balio horiekin ordezkatzea. Parentesi horretan baldintza bat agertzen da, eta ordezkatu baino lehen badakigu, gure suposizioaren arabera, egia atera behar dela:

1

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

1 1

1

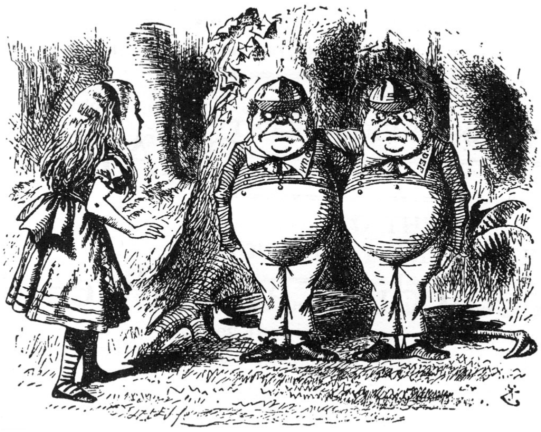
1

1 0

0

Aldagaien balioak ordezkatu ondoren, balio berdina ateratzen zaigu, eta horrek esan nahi du ez dugula kontraesanik aurkitu. Beraz, guk suposatutakoa, espresioa gezurra zela, egia da; hortaz, hasierako espresioa ez da tautologia. Ezin dugu zehaztu indeterminazioa edo kontraesana den ala ez. Baina inporta zaiguna da tautologia den ala ez jakitea. Lehen egia-taulen bidez egin dugunez, badakigu indeterminazioa dela. Kasu honetan, bi aldagai besterik ez duenez, egia-taulen metodoa erabil dezakegu. Baina hiru aldagai edo gehiago agertzen badira, hobe da absurdoaren bidezko metodoa erabiltzea.

Proposizio-kalkuluan sakontzen jarraitu baino lehen, ikus dezagun Aliziari Ahanztura Basoan gertatu zitzaion beste pasadizo bat. Beste bi pertsonaia bitxik ere askotan bisitatzen zuten Ahanztura Basoa: Tweedledum eta Tweedledee. Bata Lehoia bezalakoa da, hau da, astelehen, astearte eta asteazkenetan gezurra esaten du, eta gainerako egunetan, egia; bestea Adarbakarra bezalakoa da, hots, ostegun, ostiral eta larunbatetan esaten du gezurra, eta gainerako egunetan, egia. Baina Aliziak ez zekien nor zen bakoitza, bikiak zirelako, eta bereizezinak.



Behin batean, Aliziak anaiekin egin zuen topo. Eta honela esan zioten:

Lehenengoa: – “Ni Tweedledum naiz”.

Bigarrena: – “Ni Tweedledee naiz”.

Eta hori entzun ondoren, Aliziak berehala jakin zuen nor zer Tweedledum eta nor Tweedledee eta zer astegun zen.[21]

♠ ♠ ♠ ♠

[21] Ezinezkoa da lehenengo enuntziatua egia izatea eta bigarrena faltsua, zeren orduan bi Tweedledum izango genituzke. Modu berean, ezinezkoa da lehenengo enuntziatua faltsua izatea eta bigarrena egia, zeren orduan bi Tweedledee izango genituzke. Beraz, edo biak dira faltsuak, edo biak egiazkoak. Baina biak ezin dira faltsuak izan, ez baitago astegun bat, non bi anaiek gezurra esaten baitute. Hortaz, biek esaten dute egia, eta asteguna igandea da.

Aste horretako beste egun batean, Aliziak berriro egin zuen topo haiekin eta honela esan zioten:

Lehenengoa: – “Ni Tweedledum naiz”.

Bigarrena: – “Hori egia bada, orduan ni Tweedledee naiz”.

Nor zen nor?[22]

♠ ♠ ♠ ♠

Beste behin, Alizia bi anaiekin topatu zen, eta horietako bati galde egin zion:

– “Gezurra esaten duzu igandeetan?”.

Berak baietz erantzun zion. Gero, besteari gauza bera galdetu zion.

Zer erantzun zion beste horrek?[23]

♠ ♠ ♠ ♠

Behinola, horrela mintzatu ziren anaiak:

Lehenengoak esan zuen:	*(1)* – “Larunbatetan gezurra esaten dut”.
	(2) – “Igandeetan gezurra esaten dut”.
Bigarrenak esan zuen:	– “Bihar gezurra esango dut”.

Zer astegun zen?[24]

♠ ♠ ♠ ♠

Beste behin, Aliziak anaia batekin egin zuen topo, eta hau esan zion:

[22] Hasteko, kontuan hartu behar dugu egun hori ez dela igandea, planteamenduaren hasieran esaten den bezala. Gero, bigarren enuntziatua aztertuko dugu, baldintza bat baita. Baldintza hori gezurra izanez gero, aurrekaria egia izan behar da, eta ondorioa, gezurra. Horrela bada, lehenengo anaia Tweedledum izango litzateke, eta bigarrena ere, Tweedledum. Eta hori ezinezkoa denez, baldintza egia izan behar da. Beraz, lehenengo anaiak gezurra esaten du eta Tweedledee da, eta bigarren anaiak egia esaten du eta Tweedledum da.

[23] Igandeetan, bi anaiek esaten dute egia. Beraz, lehenengo anaiak, baietz erantzuterakoan, gezurra esaten du. Beraz, besteari egia esatea dagokio egun horretan, eta galdera berdinaren aurrean ezetz erantzun behar du.

[24] Lehenengoak bi esaldi esaten ditu. Bigarrena faltsua izan behar da derrigor, igandeetan egia esatea dagokielako. Eta bigarren esaldia faltsua bada, lehenengo esaldia ere bai, egun berean esaten duelako. Beraz, lehenengo anaia gezurtia da, eta larunbatetan (eta ostiral eta ostegunetan) egia esaten duenez, astelehen, astearte edo asteazken batean esan behar ditu esaldi horiek. Bere aldetik, bigarren anaiak egia esaten du (lehenengoak gezurra esaten duelako). Eta astelehen, astearte edo asteazkenetan esaten du egia. Baina esaldi hori (“bihar gezurra esango dut”) bakarrik asteazken batean esan dezake. Beraz asteazkena da eguna.

– “Gaur, gezurra esaten dut eta Tweedledee naiz”.

Zer anaiarekin egin zuen topo Aliziak ?[25]

♠ ♠ ♠ ♠

Eta Aliziak anaia batekin topatu, eta horrek zera esaten badio:

– “Gaur gezurra esaten dut edo Tweedledee naiz”.

Posible da jakitea zer anaia den ?[26]

♠ ♠ ♠ ♠

Egun batean, Aliziak bi anaiekin egin zuen topo. Horrela hitz egin zuten:

Lehenengoa: – “Ni Tweedledum banaiz, orduan bera Tweedledee da”.

Bigarrena: – “Bera Tweedledee bada, orduan ni Tweedledum naiz”.

Zehaztu daiteke nor den nor ? Eta asma daiteke zer astegun den?[27]

3.5.- Proposizio-kalkuluaren lokailuen birdefinizioak

Esan dugu proposizio-kalkuluan tautologia edo lege logiko infinituak daudela; dagoeneko, garrantzitsuenak aipatu ditugu. Orain, kalkulua sistema bat dela adierazteko, ikusiko dugu espresio horiek guztiak beste espresio baliokideen bidez adieraz daitezkeela, lokailu mota gutxi erabiliz, gainera. Horretarako, *definizio sintaktikoak* gauzatuko ditugu, hau da, azalduko dugu lokailu jakin batekin lotutako edozein espresio

[25] Hemen daukagu konjuntzioaren adibide on bat ($p \wedge q$). Demagun konjuntzioa egia dela: orduan bi elementuak egiazkoak izan behar dira. Baina lehenengoa (p = “Gaur gezurra esaten dut”) gezurra izango da enuntziatu osoa egiatzat hartuz gero. Beraz, konjuntzio edo enuntziatu hori ($p \wedge q$) gezurra izan behar da. Eta gezurtzat hartuz gero, lehenengo zatia egia da; hortaz, bigarrena (q = “Tweedledee naiz”) gezurra izan behar da. Beraz, hitz egiten duena Tweedledum da.

[26] Hemen daukagu disjuntzioaren adibide bat ($p \vee q$). Demagun gezurra dela. Orduan, lehenengo zatia (p=“Gaur gezurra esaten dut”) egia izango litzateke. Beraz, disjuntzioa ($p \vee q$) ezin da gezurra izan; egiazkoa izan behar da. Eta analizatzen badugu egiatzat hartuta, lehenengo zatia (p) gezurra izango litzateke. Beraz, bigarrena (q) egia izan behar da, disjuntzioa egiazkoa izateko. Hortaz q (“Tweedledee naiz”) egia da eta hitz egiten duena Tweedledee da.

[27] Bi enuntziatuak egiazkoak dira. Suposatzen badugu baten bat gezurra dela, baldintzak direnez ($p \to q$), kontraesan batera helduko gara. Beraz biak dira egiazkoak eta igande batean esaten dute, baina ezin da zehaztu nor den bakoitza.

nola defini daitekeen espresio baliokide baten bidez, hasierako lokailu hori erabili gabe. Prozesu horri “lokailuen *bir*-definizioa” deitzen zaio. Esate baterako, espresio batean disjuntzio bat agertzen bada, disjuntziorik gabeko espresio baliokide bat bila dezakegu. Batzuetan hori interesatzen zaigu, adibidez, absurdo bidezko metodoa erabili nahi badugu. Baina, oro har, birdefinizioekin erakusten da proposizio-kalkuluaren indarra eta ahalmen teorikoa.

Prozesu hau Matematikan gauzatzen denaren antzekoa da. Adibidez, “3 + 5 = 8” espresio matematikoari, bila diezaiokegu espresio baliokide bat, non “+” sinboloaren ordez beste sinbolo bat agertzen baita: “3 = 8 - 5”. Logikan nola egiten den erakusteko, ez ditugu aldagaiak erabiliko, *meta-aldagaiak* baizik; edo beste modu batean esanda, prozesu hau nola egin azaltzeko, ez dugu erabiliko kalkuluaren lengoaia, metalengoaia baizik. Aldagaiak *p, q, r…* dira; meta-aldagaiak *X, Y, Z…* Meta-aldagai horiek kalkuluaren edozein *OEE* adierazten dute; eta kalkuluaren *OEE* guztiak birdefini daitezke espresio baliokide baten bidez, bi lokailu besterik ez erabiliz. Guk, birdefinizioak egiteko, ukazioa, disjuntzioa, konjuntzioa eta baldintza erabiliko ditugu, eta aukeratuko dugu zein izango diren bi lokailuak:

- Edo ukazioa eta disjuntzioa. ($\neg, \lor$)
- Edo ukazioa eta konjuntzioa. ($\neg, \land$)
- Edo ukazioa eta baldintza. ($\neg, \rightarrow$)

Ikus dezagun baldintza birdefinitzeko legea (*metalegea*, hobeto esanda), ukazioa eta disjuntzioa erabiliz:

$$\mathbf{UD_1} \quad (X \rightarrow Y) = (\neg X \lor Y)$$

Lege horren arabera, honako pausoa eman dezakegu:

$$[\,\underbrace{(p \lor q)}_{X} \rightarrow \underbrace{r}_{Y}\,] = [\,\neg\, \underbrace{(p \lor q)}_{X} \lor \underbrace{r}_{Y}\,]$$

Honela jokatuko dugu: hasierako espresioan (baldintza bat) baldintzaren aurrekaria (*X*) eta ondorioa (*Y*) identifikatu. Eta gero, $\mathbf{UD_1}$ legearen bitartez, baldintza birdefinitu dugu.

Eta orain $\mathbf{UD_1}$ legea egiazkoa dela ikusteko, aldagaiei edukia emango diegu:

X= Zu mugitu Y = Nik zu hil

(1) “Mugitzen bazara, orduan hilko zaitut” $(X \rightarrow Y)$

(2) “Ez mugitu edo hilko zaitut” $(\neg X \vee Y)$

Agerikoa da (1) eta (2) enuntziatuak berdinak direla. Baina argi ez bada geratu, egin dezakegu enuntziatu bakoitzaren egia-taula, eta egiaztatu:

X	*Y*	$(X \rightarrow Y)$	$\neg X$	$\vee$	Y
1	1	**1**	0	**1**	1
1	0	**0**	0	**0**	0
0	1	**1**	1	**1**	1
0	0	**1**	1	**1**	0

=

Jarraian, birdefinizioak egiteko gainerako legeak aipatuko ditugu, eta, aurrekoarekin egin dugun bezala, egiazta dezakegu egiazkoak direla.

$$\textbf{UD}_2 \quad (X \wedge Y) = \neg (\neg X \vee \neg Y)$$

Lege horrek esaten digu nola kendu espresio batetik konjuntzioa, haren ordez ukazioa eta disjuntzioa erabiliz; badu zer ikusia Morgan-en legearekin (*Ik.* 5*A legea).

$$\textbf{UD}_3 \quad (X \leftrightarrow Y) = \neg [\neg (\neg X \vee Y) \vee \neg (\neg Y \vee X)]$$

Birdefiniziorekin ariketak egiteko, buruz jakin behar ditugu lege horiek. Hala ere, azken lege hau nahiko luzea da, eta ez du merezi buruz jakitea. Aurreko biak (UD_1 eta UD_2) jakinez gero, honela ondoriozta dezakegu:

$$(X \leftrightarrow Y) =_{df.} (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$$

Baldintzabikoa bi baldintzaren bidez definitu daitekeenez, konjuntzio bat ateratzen zaigu. Eta, orain, baldintza horiek UD_1 legearen bidez disjuntzio bihur ditzakegu:

$$= \underbrace{(\neg X \vee Y)}_{A} \wedge \underbrace{(\neg Y \vee X)}_{B}$$

Eta, ondoren, **UD₂** legearen bidez, erdian dagoen konjuntzioa kendu behar dugu: Legea aplikatu ondoren, hau daukagu:

$$\neg [\neg \underbrace{(\neg X \vee Y)}_{A} \vee \neg \underbrace{(\neg Y \vee X)}_{B}]$$

Eta horrela lortu dugu **UD₃** legea.

Hiru lege horiekin, proposizio-kalkuluaren edozein *OEE* birdefini dezakegu, ukazioa eta disjuntzioa erabiliz. Baina espresioak birdefini ditzakegu, baita ere, ukazioa eta konjuntzioa erabiliz. Hauek dira kasu horretan erabili beharreko legeak:

UK_1 $(X \rightarrow Y) = \neg (X \wedge \neg Y)$

UK_2 $(X \vee Y) = \neg (\neg X \wedge \neg Y)$

Eta hirugarrena buruz ez ikasteko, lehen aipatu dugun bezala eginda aterako dugu:

$(X \leftrightarrow Y) =_{df.} (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$; orain ez da kendu behar erdian dagoen konjuntzioa, eta baldintzak kentzeko **UK_1** legea erabili behar dugu:

UK_3 $(X \leftrightarrow Y) = \neg (X \wedge \neg Y) \wedge \neg (Y \wedge \neg X)$

Ikus dezagun, azkenik, nola ordezkatu edozein espresio ukazioak eta baldintzak besterik ez duen beste batekin.

UB_1 $(X \vee Y) = (\neg X \rightarrow Y)$

UB_2 $(X \wedge Y) = \neg (X \rightarrow \neg Y)$

UB_3 $(X \leftrightarrow Y) = \neg [(X \rightarrow Y) \rightarrow \neg (Y \rightarrow X)]$

Lege horiekin ikus dezakegu proposizio-logika nolakoa den: kalkulatzeko balio duen sistema formala. Eta, sistema horretan, jadanik aipatuak ditugun bi lokailu berezi daude: Sheffer-en barra eta gezi-funtzioa. Sheffer logikaria 1913an konturatu zen lokailu berezi bat zegoela proposizio-kalkuluan, eta, horren bitartez, gainerakoak birdefini zitezkeela. Orain arte ikusi dugu nola birdefini daitekeen edozein *OEE* bi lokailurekin; orain ikusiko dugu nola birdefinitu edozein *OEE* lokailu bakar batekin. Eta hori, Sheffer-en barra hain zuzen, 16 lokailu posibleen artean 2. zutabean agertzen da. Lokailu horren egia-taula disjuntzioaren egia-taularen kontrakoa denez, “konjuntzioaren ukazioa” edo *bateraezintasuna* deitzen da.

Horrela adierazten da funtzio hori: $p \mid q$ eta horrela irakurtzen da: “*p* bateraezina da *q*-rekin”. Honako hau da bere egia-taula:

p	*q*	p | q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Edozein *OEE* adieraz daiteke funtzio horren bitartez; edozein argudio logiko adieraz daiteke lokailu horrekin. Ikus dezagun nola:

S1 $\neg X = (X \mid X)$

Lege hori oso intuitiboki ulertzen da. Demagun *p* = “Maria itsusia da”; orduan gauza bera da esatea: “Maria ez da itsusia” ($\neg$ p) eta “Maria itsusia izatea Maria itsusia izatearekin bateraezina da” (p | p). Nahiko korapilatsua ateratzen da, baina “$\neg$ p” espresioari eta “p | p” espresioari egia-taula eginez gero, gauza bera aterako zaigu. Ikus ditzagun gainerako birdefinizioen legeak:

S2 $X \vee Y = [\,(X \mid X) \mid (Y \mid Y)\,]$

S3 $X \wedge Y = [\,(X \mid Y) \mid (X \mid Y)\,]$

S4 $X \rightarrow Y = [\,(Y \mid Y) \mid X\,]$

S5 $X \leftrightarrow Y = \{\,[\,(X \mid X) \mid (Y \mid Y)\,] \mid (X \mid Y)\,\}$

Egin dezagun S5 legearen demostrazioa egia-taularen bidez:

X	Y	$X \leftrightarrow Y$	$\{ [(X \mid X) \mid (Y \mid Y)] \mid (X \mid Y) \}$
1	1	**1**	0 1 0 **1** 0
1	0	**0**	0 1 1 **0** 1
0	1	**0**	1 1 0 **0** 1
0	0	**1**	1 0 1 **1** 1

=

Ondoren, hainbat ariketa egingo dugu ikusteko nola burutzen den lokailuen birdefinizio-prozesua.

Demagun espresio hau dugula:

⓪ $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

Eta birdefinitu nahi dugula, ukazioak eta disjuntzioak besterik ez duen beste batekin.

⓪ $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p) =$

① $\neg (\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg (\neg q \vee \neg p) \ =$ UD$_2$ legearen arabera

② $\neg \neg (\neg p \vee \neg q) \vee \neg (\neg q \vee \neg p) =$ UD$_1$ legearen arabera

③ $(\neg p \vee \neg q) \vee \neg (\neg q \vee \neg p)$ 2* legearen arabera ($\neg \neg X = X$)

Birdefinizio horren bitartez lortu dugu ③ espresioa, eta horrek bakarrik dauzka ukazioak eta disjuntzioak, baina ③ = ⓪.

Orain, demagun espresio hau dugula:

⓪ $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)] =$

Eta birdefinitu nahi dugula ukazioak eta konjuntzioak besterik ez duen beste batekin. Honako hau da prozesua:

① $\neg [(p \wedge q) \wedge \neg r] \rightarrow \neg [p \wedge \neg (q \rightarrow r)] =$ UK$_1$ legearen arabera.

② $\neg \{ \neg [(p \wedge q) \wedge \neg r] \wedge \neg \neg [p \wedge \neg (q \rightarrow r)] \} =$ UK$_1$ legearen arabera.

③ $\neg \{ \neg [(p \wedge q) \wedge \neg r] \wedge [p \wedge \neg (q \rightarrow r)] \} =$ 2* legearen arabera.

④ $\neg \{ \neg [(p \wedge q) \wedge \neg r] \wedge [p \wedge \neg \neg (q \wedge \neg r)] \} =$ UK$_1$ legearen arabera.

⑤ $\neg \{ \neg [(p \wedge q) \wedge \neg r] \wedge [p \wedge (q \wedge \neg r)] \}$ 2* legearen arabera.

Birdefinizio-prozesua bukatu ondoren, badakigu ⓪ = ⑤. Eta hori egiazta dezakegu bi espresio horien egia-taula eginda. Gauza bera ateratzen bada, orduan badakigu baliokideak direla.

Azkenik, egin dezagun ariketa bat Sheffer-en barrarekin.

⓪ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q =$

② $\{\ [\ (q \mid q) \mid p\ ]\ \wedge p\ \}\ \rightarrow\ q =$ S_4 legearen arabera.

③ $(q \mid q)\ \mid \{[\ (q \mid q) \mid p\ ]\ \wedge p\} =$ S_4 legearen arabera.

④ $(q \mid q)\ \mid \left[\{[\ (q \mid q) \mid p\ ] \mid\ p\} \mid \{[\ (q \mid q) \mid p\ ] \mid\ p\} \right]$ S_3 legearen arabera.

Horrela lortu dugu birdefinitzea espresio bat lokailu bakar bat erabiliz, hau da, Sheffer-en barra erabiliz. ⓪ = ④ berdintasuna egiazta dezakegu bi espresio horien egia-taula eginez.

Atal honekin bukatzeko esan behar da birdefinizioak egiteko komeni dela buruz jakitea sei lege hauek: UD_1, UD_2, UK_1, UK_2, UB_1 eta UB_2 Eta, batez ere, oso lagungarria da ariketa asko egitea, erraztasuna lortzeko. Hona hemen hainbat ariketa proposizio-kalkuluaren inguruan:

a) Demostra ezazu goian dauden lege guztiak (1*-16*) tautologiak direla.

b) Itzul itzazu lege horiek lengoaia naturalaren argudioetara, aldagai proposizional bakoitza enuntziatu zehatz batekin ordezkatuz.

c) Birdefinitu espresio logiko horiek baliokideak diren beste batzuen bitartez, modu honetan:

* 3-5: birdefinitu konjuntzio eta ukazioarekin.
* 6-10: birdefinitu disjuntzio eta ukazioarekin.
* 13-15: birdefinitu baldintza eta ukazioarekin.
* 16: birdefinitu Sheffer-en barrarekin.

3.6.- Logikaren santutegia

Orain, beste Uharte berezi batera bidaiatuko gara. Baal Uhartea deitzen da eta horko biztanleak gizakiak eta tximinoak dira. Tximinoak gizakiak bezain altuak dira, eta haiek bezala mintzatzen dira. Denak kapaz eta txanoz janzten dira eta, hori dela eta, bereizezinak dira. Gainera, gizaki guztiak eta tximino guztiak zaldunak edo ezkutariak izan daitezke: zaldunek beti esaten dute egia, eta ezkutariek, ordea, beti gezurra. Uharte horren erdialdean, Baaleko Tenplua dago eta apaiz guztiak metafisikoak dira. Tenpluaren barruan, Santutegia dago eta hor bizi omen da apaiz nagusia, zeinek unibertsoaren azken misterioa ezagutzen baitu, hau da, zergatik zerbait dagoen, ezereza existitu beharrean.

Bisitariei uzten zaie Tenpluaren Santutegian sartzen, proba logiko batzuk gainditzen badituzte. Atarian, hiru proba planteatzen dira; gero, tenpluaren barruan, beste hiru; eta, azkenik, Santutegian bertan, beste bi. Gu saiatuko gara –eta ziur lortuko dugula– Santutegi horretan sartzen. Hona hemen proba horiek. Arrakastaz gainditzeko, kontuan hartu lokailuen egia-taulak.

1. **Proba**: Tenplura heltzerakoan, atarian biztanle txanodun bat agertu eta honela esan zuen:
   – “Ni ezkutaria edo tximinoa naiz”.
   Zer zen?[28]

♠ ♠ ♠ ♠

2. **Proba**: Lehenengo proba gainditu ondoren (egia esan, oso erraza izan zen), beste txanodun batekin egin genuen topo, eta honela esan zigun:
   – “Ni ezkutaria eta tximinoa naiz”.
   Zer zen?[29]

♠ ♠ ♠ ♠

3. **Proba**: Berriro topatu ginen beste txanodun batekin, eta aldi hartan esan zigun:
   – “Ez da egia tximinoa eta zalduna naizela”.

[28] Esaldiak “p $\vee$ q” forma logikoa dauka. Beraz, ezkutari batek esaten badu –gogoratu horiek gezurra esaten dutela beti–, bi zatiek gezurra izan behar dute. Baina lehenengoa (*p*) egia litzateke, ezkutariak esanez gero, eta enuntziatu osoa egia litzateke. Beraz, hori ezin du ezkutari batek esan, eta derrigor zaldun batek esan behar du, eta egia izan behar da. Kasu horretan, lehenengo zatia gezurra denez, bigarrena egia izan behar da. Hortaz, esaldia esaten duena zalduna eta tximinoa da.

[29] Esaldiak “p $\wedge$ q” forma logikoa dauka. Beraz, zaldun batek esanez gero, bi zatiak (*p* eta *q*) egiazkoak izan behar dira. Baina lehenengoa ez da egia. Beraz, zaldun batek ezin du hori esan, eta ezkutari batek esaten du. Kasu horretan, lehenengo zatia (*p*) egia litzateke; hortaz, bigarrena (*q*) derrigor izan behar da gezurra. Ondorioz, gizakia eta ezkutaria da.

Zer zen txanodun hori?[30]

♠ ♠ ♠ ♠

Aurreko hiru probak gainditu ondoren, tenpluan bertan sartu ginen. Hor bi txanodunekin egin genuen topo, platinozko jarleku batean eserita zeudelarik. A eta B deituko diegu.

4. Proba: *A:* – "Gutxienez gutako bat tximinoa da".

B: – "Gutxienez gutako bat ezkutaria da".

Zer ziren A eta B?[31]

♠ ♠ ♠ ♠

5. Proba: *A:* – "Gu biok tximinoak gara".

B: – "Gu biok ezkutariak gara".

Zer ziren A eta B?[32]

♠ ♠ ♠ ♠

6. Proba: *A:* – "B ezkutaria eta tximinoa da. Ni gizakia naiz".

B: – "A zalduna da".

Zer ziren A eta B?[33]

---

[30] Enuntziatuak "$\neg$ (p $\wedge$ q)" forma logikoa dauka, hau da, "ez naiz aldi berean tximinoa eta zalduna". Asmakizun honek bere zailtasuna dauka, eta ondo jakin behar dira egia-taulak. Demagun ezkutari batek esaten duela: "$\neg$ (p $\wedge$ q)"; beraz, proposizio molekular osoa gezurra litzateke, eta, orduan, "(p $\wedge$ q)" egia izan behar da. Hipotesi horrekin jarraituz, *q* proposizio atomikoak ere egia izan behar du derrigor, baina ezkutari batek esanez gero, gezurra litzateke. Beraz, ezkutari batek ezin du esan enuntziatu osoa, kontraesan batera heltzen garelako. Ondorioz, zaldun batek esan behar du, eta "$\neg$ (p $\wedge$ q)" espresio osoa egia izan. Beraz, bigarren hipotesi horretan, "(p $\wedge$ q)" gezurra izango litzateke: bigarren zatia (*q*) egia denez (zaldun batek esaten duelako), lehengoa (*p*) gezurra izan behar da. Hori dela eta, txanoduna gizakia eta zalduna da.

[31] Bigarren esaldia ezin du ezkutari batek esan, egia esango luke eta. Beraz, B zalduna izan behar da, eta egia esaten du. Egia esaten duenez, A ezkutaria izan behar da, eta gezurra esaten du. Hortaz, ez da egia gutxienez tximino bat dagoela. Ondorioz, biak dira gizakiak, A ezkutaria eta B zalduna.

[32] Hemen berriro hasiko gara bigarren esaldiarekin: ezinezkoa da zaldun batek bigarren esaldia esatea, gezurra esango bailuke. Beraz, B txanoduna ezkutaria da, eta dioena gezurra denez, A zalduna izan behar da derrigor. A-k egia esaten duenez, biak dira tximinoak.

♠ ♠ ♠ ♠

Proben bigarren zatia gainditu ondoren, heldu ginen tenpluaren bihotzera: santutegira. Baina ez zen erraza hara sartzea: gure aurrean lau ate zeuden (X, Y, Z eta W), eta horietako batek gutxienez bideratzen gintuen benetako Santutegira; baina, baten bat sartzen bada zuzena ez den atetik, dragoi basati batek jango du. Beraz, oso garrantzitsua zen ez okertzea. Santutegiaren sarreran zortzi apaiz zeuden: A, B, C, D, E, F, G eta H. Haiek zaldunak edo ezkutariak ziren. Honela hitz egin zuten:

7. Proba: *A:* – “X atea zuzena da”.

B: – “Y, Z ateetatik bat, gutxienez, zuzena da”.

C: – “A eta B zaldunak dira”.

D: – “X eta Y ateak zuzenak dira”.

E: – “X eta Z ateak zuzenak dira”.

F: – “D edo E zalduna da”.

G: – “C zalduna bada, orduan F ere bai”.

H: – “G eta biok zaldunak bagara, orduan A ere bai”.

Zein ate aukeratu behar zen Santutegian sartzeko?[34]

♠ ♠ ♠ ♠

---

[33] Hasiko gara bigarren enuntziatuarekin. B zalduna bada, orduan A ere zalduna izan behar da . Baina A-k esaten du B ezkutaria dela; beraz, kontraesan bat aurkitzen dugu. Ondorioz, B ezin da izan zalduna, ezkutaria baizik. B ezkutaria denez, eta A zalduna dela dioenez, A ezkutaria izan behar da. Horrenbestez, biak ezkutariak dira. A-k bi esaldi adierazten ditu. Bigarrenean, bera gizakia dela esaten du. Hortaz, gezurra esaten duenez, A tximinoa da. Lehengo esaldia konjuntzio bat da ($p \wedge q$), baina lehenengo zatia (*p*) egia da; orduan bigarrena gezurra izan behar da, konjuntzio osoa gezurra izateko. Bigarren zati horrek B tximinoa dela adierazten du. Beraz B gizakia da.

[34] Hasiera ona da G-k dioena aztertzea: baldintzaren forma dauka ($p \to q$). Baldintza bat gezurra da soilik kasu batean: p=1 eta q=0 denean. Eta *p* egia bada, orduan, C-k esandakoaren arabera, A eta B zaldunak dira. Hori guztia horrela bada, X atea zuzena da, eta baita Y edo Z ere. Beraz, bai D-k eta bai E-k esandakoa egia izan daiteke. Eta F-k esaten duena ere egia litzateke . Baina hasierako hipotesiaren arabera (p=1 eta q=0), F-k gezurra zioen (*q*). Beraz, kontraesan bat aurkitu dugu, eta horrekin badakigu G zalduna dela.

Orain badakigu G zalduna dela, eta eman dezagun baldintzaren lehenengo zatia (*p*) egia dela, eta baita bigarrena (*q*) ere (p=1, q=1). Horren arabera, C zalduna da eta baita A eta B ere. Beraz, gutxienez X atea zuzena da eta baita Y edo Z ere. Bi kasu ditugu: A) X eta Y ateak zuzenak dira eta, orduan, D zalduna da; eta B) X eta Z ateak zuzenak dira, eta, orduan, E zalduna da. Horrela, D edo E zalduna izan behar da, eta horregatik F zalduna da derrigor, lehenago hori esan duelako. Ondorioz, C zalduna bada, F ere zalduna da. Horrexegatik dakigu ziur G-k esandakoa egia dela.

Har dezagun orain H-k esandakoa. Horrek ere baldintzaren forma dauka. Demagun H zalduna dela; orduan A zalduna izan behar da. Eta horrela gertatzen da, G zalduna delako; beraz, edozein kasutan, A zalduna da, eta aukeratu behar den atea X da.

Ate zuzena aukeratu ondoren, sartu ginen Santutegiaren barruan, eta diamantezko bi jarlekutan eserita zeuden bi apaizekin egin genuen topo. Ziur aski, horietako batek unibertsoaren azken galderaren erantzuna jakingo zuen, hau da, zergatik existitzen den izatea, ezereza egon beharrean. Honela esan zuten bi apaiz horiek:

8. **Proba**:

Lehenengo Apaiza: – "Ni ezkutaria naiz, eta ez dakit zergatik dagoen zerbait, ezerezaren ordez".

Bigarren Apaiza: – "Ni zalduna naiz, eta ez dakit zergatik dagoen zerbait, ezerezaren ordez".

Ba al zekien benetan apaizen batek zergatik dagoen izatea, ezereza egon beharrean?[35]

♠ ♠ ♠ ♠

9. **Proba**:

Azkenik, unibertsoaren azken misterio hori ezagutzeko zorian gaude. Jakin badakigu gutxienez apaiz horietako batek ezagutzen duela misterio horren erantzuna. Beraz, harengana zuzen-zuzen jo eta galdetu genion: – "*Zergatik dago zerbait, ezerezaren ordez?*". Eta berak erantzun zigun: – "*Badago zerbait, ezerezaren ordez*".

Bere erantzuna jaso ondoren, zer konklusio mota atera genezakeen?[36]

[35] Lehenengo apaizaren esaldia konjuntzio bat da (p $\wedge$ q) eta, egia izateko, bi zatiek egia izan behar dute. Baina zaldun batek esanez gero, lehenengo zatia (*p*) gezurra litzateke. Beraz, lehenengo apaiza ezkutaria da, eta, esaldiaren lehenengo zatia (*p*) egia denez, bigarrena gezurra da. Beraz, lehenengo apaizak badaki zein den unibertsoaren misterioa. Ezin dugu jakin bigarren apaiza zer den, baina unibertsoaren misterioa ezagutzen badu, ezkutaria izan behar da.

[36] Esaldia esaten duena ezkutaria da, eta, beraz, "badago zerbait, ezerezaren ordez" esaterakoan, gezurra esaten ari da. Orduan, hori gezurra bada, gure konklusioa honako hau izango da: *ez da existitzen ezer, ez dago ezer*. Baina horrek pentsakor uzten gaitu: ez badago ezer, nola gaude egoera honetan? Ezer existitzen ez bada, Baal Uhartea ere ezin da existitu. Kontua ez da ez dela existitzen, baizik eta *logikoki* ezinezkoa dela existitzea. Baina, mundua existituko balitz, gertaera horiek kontuan hartuta, orduan ez litzateke ezer existituko, ezta Baal Uhartea ere. Badugu hemen kontraesan logiko bat…, eta arazo filosofiko serio bat ere bai: irakurtzen ari zarena, existitzen al da?

4.- KUANTIFIKAZIO LOGIKA

Orain arte ikusitako proposizio-logikak edo proposizio-kalkuluak analizatzen du guk egiten ditugun arrazoibideen forma logikoa, arrazoibide horiek baliozkoak diren ala ez jakiteko, tautologikoak diren ala ez. Baina kalkulu horretan, enuntziatuen barruko egitura baztertu egin dugu; ez dugu kontuan hartu, proposizioak blokean hartu baititugu.

Hala ere, badaude beste arrazoibide mota batzuk: kasu horietan, baliozkoak diren ala ez jakiteko, ez da nahikoa haien proposizioen arteko lotura logikoak analizatzea. Arrazoibide horien forma edo eskema logikoa ezin da aztertu haien proposizioak eta lokailuak kontuan hartuta bakarrik; beharrezkoa da harantzago joatea: proposizioen barruko egitura analizatu behar da, eta barruan dauden elementu garrantzitsuak identifikatu. Bakarrik horrela jakin dezakegu arrazoiketa mota hori baliozkoa den ala ez; proposizio-kalkuluak ez du balio horretarako.

Analizatu eta identifikatu behar ditugun elementuak zenbatzaileak eta predikatuak dira, eta, beraz, logika mota hau **kuantifikazio-kalkulua** edo kuantifikazio-logika deitzen da. Ikusiko dugun bezala, **predikatu-kalkulua** edo predikatu-logika ere deitzen da, proposizioen predikatuak analizatzen dituelako.

Ikus dezagun oso adibide ospetsua:

- Gizaki guztiak hilkorrak dira.	P1
- Sokrates gizakia da.	P2
- (Beraz,) Sokrates hilkorra da.	K

Bistan da arrazoibide arrunta eta erraza dela: denok ikusten dugu zuzena dela. Badugu bi premisa (P1 eta P2), eta premisa horietatik konklusio bat (K) ondorioztatzen da. Eskema logiko hori **silogismoa** deitzen da: silogismoak beti dauka bi premisa eta konklusio bat. Baina arrazoiketa batek izan dezake premisa asko –ez bi bakarrik– eta konklusio bakar bat. Beraz, silogismoak aztertzen dituen atala kuantifikazio-kalkuluaren oso zati txikia da. Zati hori **Silogistika** deitzen da, eta Aristotelesek garatu zuen Kristo aurreko IV. mendean.

Aipatutako arrazoibidea ezin dugu proposizio-kalkuluaren bidez adierazi. Esaten badugu haren egitura logikoa “$(p \wedge q) \rightarrow r$” dela, informazio asko galtzen dugu, eta, gainera, ateratako eskema logikoa ez da tautologia bat. Beraz, lengoaiaren beste analisi mota bat egin behar dugu. Nola egin, baina? Silogismo batek izan ditzakeen forma logiko guztiak analizatu zituen Aristotelesek, eta, horiek buruz gogoratzeko, izen berezi bat eman zien. Eta horrela, bi premisatatik konklusioa ateratzeko metodo bat utzi zigun. Dena den, guk ez dugu metodo hori erabiliko, nahiko korapilatsua baita. Horren ordez, Lewis Carrollek[37] asmatutako metodo berezi bat azalduko dugu: azken finean, Carrollen metodoa joko bat da. Edozein kasutan ere, ez dugu proposizio-kalkulua ahaztuko; nolabait esateko, kuantifikazio-kalkuluan integratzen da; izan ere, Logika kalkulu multzo bat da, eta oso ondo antolatua.

4.1.- Enuntziatuen lau eredu oinarrizko

Hasteko, ikusiko dugu nola adierazten diren gaur egun kuantifikazio-kalkuluaren enuntziatuak, eta horrela antzemango dugu proposizio-kalkuluarekiko erlazioa. Bi ikur berri erabiliko ditugu, izenak eta predikatuak izendatzeko: *a, b, c, d…* (aldaezinak) eta *x, y, z…*(aldagaiak) erabiltzen dira *izenak* adierazteko; eta *P, Q, R… predikatuak* adierazteko. Izan ere, “Gizon *guztiak* hilkorrak dira” enuntziatua adierazteko, horrela egingo genuke:

$$\bigwedge x\,(\mathrm{P}x \rightarrow \mathrm{Q}x) \text{ edo } \forall x\,(\mathrm{P}x \rightarrow \mathrm{Q}x)$$

Hiztegia: *P* = gizakia da. *Q* = hilkorra da.

Itzulpena: “*x* guztientzat, *x* P bada, orduan *x* Q da”.

Ikusten den moduan, zenbatzailea (“guztiak”) identifikatu behar dugu sinbolo berezi batekin. Adibidean, zenbatzaile hori unibertsala eta baiezkoa da, baina enuntziatuak horrela aztertzen baditugu, lau motatakoak aurki daitezke: A, E, I eta O.

A – UNIBERTSAL BAIEZKOA

“ P *guztiak* Q dira” Kasu bat: “Gizaki *GUZTIAK* jakintsuak dira”

Hiztegia: *P* = gizakia da. *Q*= jakintsua da.

Kalkuluen espresioa: $\bigwedge x\,(\mathrm{P}x \rightarrow \mathrm{Q}x)$ edo $\forall x\,(\mathrm{P}x \rightarrow \mathrm{Q}x)$

Irakurketa: “*x* guztientzat, baldin eta *x* gizakia bada, orduan *x* jakintsua da”.

[37] Lewis Carroll da *Alizia herrialde harrigarrian* liburua idatzi zuena. Baina, berez, matematika- eta logika-irakaslea izan zen. Silogismoak egiteko metodoa *Simbolic Logic* liburuan azaldu zuen joko gisara. Gaztelaniaz, *El juego de la lógica* izenburuarekin argitaratu zen.

E – UNIBERTSAL EZEZKOA

"*Ezein* P *ez* da Q" Kasu bat: "*EZEIN* gizaki *EZ* da jakintsua"

Kalkuluen espresioa: $\bigwedge x\,(Px \rightarrow \neg\, Qx)$ edo $\forall x\,(Px \rightarrow \neg\, Qx)$

Irakurketa: "*x* guztientzat, baldin eta *x* gizakia bada, orduan *x* ez da jakintsua".

I – PARTIKULAR BAIEZKOA

"*Zenbait* P Q dira" Kasu bat: "*ZENBAIT* gizon jakintsu dira"

Kalkuluen espresioa: $\bigvee x\,(Px \wedge Qx)$ edo $\exists x\,(Px \wedge Qx)$

Irakurketa: "*x*-ren bat bada, *x* hori gizakia eta jakintsua da".

O – PARTIKULAR EZEZKOA

"*Zenbait* P *ez* dira Q" Kasu bat: "*ZENBAIT* gizaki *EZ* dira jakintsuak"

Kalkuluen espresioa: $\bigvee x\,(P\,x \wedge \neg\, Q\,x)$ edo $\exists\, x\,(P\,x \wedge \neg\, Q\,x)$

Irakurketa: "*x*-ren bat bada, *x* hori gizakia da eta ez da jakintsua".

Ikus dezagun beste adibide bat. Kontuan hartu arrazoiketa baliozkoa izan daitekeela, nahiz eta esaldi bakoitza gezurra izan:

P1— Katu guztiek frantsesa ulertzen dute. (A)
P2— Zenbait martetar katuak dira (I)
K – Zenbait martetarrek frantsesa ulertzen dute (I)

Nahiz eta katuek hizkuntzak ulertu ez, eta Marten katurik egon ez, arrazoiketa guztiz zuzena da forma logikoari begira.

Guk, hemendik aurrera, Carrollek proposatutako metodoari jarraituz, *x*, *y* eta *m* hizkiekin identifikatuko ditugu silogismoaren zatiak. Beraz, gaur egungo notazioa edo sinbologia aldatuko dugu, eta ez ditugu erabiliko goian aipatutako sinboloak.

x = **termino nagusia**: termino hau lehenengo premisan agertzen den predikatua da, eta ez da bigarrenean errepikatzen.

y = **termino txikia**: termino hau bigarren premisan agertzen den predikatua da, eta ez da lehenengoan errepikatzen.

m = **termino ertaina**: termino hau bi premisetan agertzen da errepikatuta, eta konklusioan ez da agertu behar.

Hori dela eta, goian aipatutako silogismoak honako eskema logikoari jarraitzen dio:

P1— Katu guztiek frantsesa ulertzen dute.	⇨	*m* guztiak *x* dira
P2— Zenbait martetar katuak dira.	⇨	zenbait *y m* dira
K – Zenbait martetarrek frantsesa ulertzen dute.	⇨	zenbait *y x* dira

Guk, silogismoak egiteko, aipatutako lau esaldi edo enuntziatu motak erabiliko ditugu: A, E, I edo O. Normalean, ariketa batean, bi premisa emango digute, eta guk konklusio zuzena atera beharko dugu. Baina, hori egiten jakiteko, gauza batzuk azaldu behar dira aldez aurretik.

4.2.- Enuntziatuaren forma normala

Arrazoibide bat silogismo baten eran agertzen zaigunean, guk nolabaiteko itzulpena egin behar dugu, silogismo horren enuntziatuak *forma normal* batean jartzeko. Enuntziatu batek, bere forma normalean, lau elementu eduki behar ditu:

(1) Zenbatzailea: “zenbait”, “ezein” edo “guztiak” hitzak derrigor agertu behar dira.

(2) Subjektuaren izena.

(3) Kopula, hau da, “izan” aditza.

(4) Predikatuaren izena.

Adibidez: “Katu guztiek frantsesa ulertzen dute” esaldia beste modu honetan esan dezakegu, lau elementu horiek agerian uzteko:

= "Katu guztiak dira frantsesa ulertzen duten izakiak"
(2) (1) (3) (4)

Helburua da enuntziatu bakoitzean lau elementu horiek ondo bereiztea. Edozein esaldi emanda, forma normala ateratzeko pausoak hauek dira:

1.- Subjektua identifikatu behar da.

2.- Enuntziatuaren aditza "izan" aditza ez bada, esaldia itzuli behar da eta "izan" aditza nahitaez agertu behar da (jarritako adibidean egin dugun bezala).

3.- Predikatua identifikatu behar da.

4.- Termino bakoitzaren izena agertzen bada, ez da beharrezkoa diskurtsoaren unibertsoa zehaztea. Baina, predikatuak izenik gabe agertzen badira, orduan diskurtsoaren unibertsoa zehaztu egin behar da (jarritako adibidean laugarren elementuarekin egin dugun moduan).

5.- Zenbatzailea identifikatu behar da.

6.- Honela ordenatu behar da: (1) zenbatzailea, (2) subjektua, (3) kopula eta (4) predikatua.

1. **adibidea**: "Zenbait nekazari eguraldiaz kexatzen dira beti". (O)
   (1) Subjektua: nekazariak
   (2) Aditza: kexatzen direnak ("izan" aditzarekin)
   (3) Predikatua: beti kexatu.
   (4) Unibertsoa: pertsonak.
   (5) Zenbatzailea: "zenbait".
   (6) Forma normala: "Zenbait / nekazari /dira / eguraldiaz beti kexatzen direnak".

2. **adibidea**: "Ezein ardik ez du habanorik erretzen". (E)
   (1) Subjektua: ardiak.
   (2) Aditza: erretzen duena da.
   (3) Predikatua: habanoak erretzea.
   (4) Unibertsoa: animaliak.
   (5) Zenbatzailea: "ezein".
   (6) Forma normala: "Ezein / ardi / ez da / habanoak erretzen dituen horietakoa".

Formal normal hori eratzerakoan, badago kontu berezi bat enuntziatu unibertsal baiezkoekin: A motatako esaldiak adierazterakoan, formula honen arabera banatu behar ditugu: A = I + E. Esaten badugu: “Irakasle guztiek diru mordo bat dute”, guk bi esaldiren bidez adierazi behar dugu esaldi hori, eta emandako informazioa berdina da:

3. Adibidea: “Irakasle guztiek diru mordo bat dute”. (A)

(1) Subjektua: irakasleak.

(2) Aditza: diruduna izan.

(3) Predikatua: diru mordo bat eduki.

(4) Unibertsoa: pertsonak.

(5) Zenbatzailea: “guztiak”.

(6) Forma normala: (A) “Irakasle guztiak dirudunak dira”.

Hemen, banaketa hau egin behar dugu:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(I) “Zenbait irakasle dirudunak dira”.}\\ \text{(E) “Ezein irakasle ez da pobrea”.}\end{array}\right.$$

Ikusten den bezala, “A = I + E” formula aplikatu dugu, eta bigarren esaldia osatzerakoan predikatua ezeztatu behar izan dugu. Modu horretan, hasieran emandako esaldian dagoen informazioa mantendu egiten dugu, baina bi esalditan adierazita. Prozesu hori aplikatu behar dugu (A) motatako esaldi guztietan: unibertsal baiezkoak diren esaldiak *bikoitzak* dira logika-ikuspuntutik. Zergatik egiten dugu hori? Silogismoak ebazteko orduan prozesu hori erabili behar delako.

4.3.- Diagrama biliterala

Silogismoak ebazteko, unibertso logiko bat edo diskurtsoaren unibertsoa zehaztu behar dugu. Horretarako, diagrama biliterala erabiliko dugu:

	y	y’
x	*xy*	*xy’*
x’	*x’y*	*x’y’*

Diagrama hori biliterala deitzen da, bi hizki agertzen direlako. Lerroetan *x* eta *x’*, eta zutabeetan *y* eta *y’*. Beraz, lau gelaxka ezberdin ditugu: *xy*, *xy’*, *x’y* eta *x’y’*. Guk, silogismoak egiteko, buruz ikasi behar ditugu diagrama horren gelaxken izenak, hizkiak ikusi barik. Azken finean, diagrama horrek unibertso bat adierazten du. Demagun irakasleen unibertsoaz ari garela: *x* = irakasle zaharrak, eta *y* = irakasle aberatsak. Beraz, *x’* *x*-ren kontrakoa izango da (ez-*x*), hots, *x’* = irakasle gazteak, eta, era berean, *y’* = irakasle pobreak (aberatsak ez direnak).

	y	y’
x	Irakasle zahar-aberatsak	Irakasle zahar-pobreak
x’	Irakasle gazte-aberatsak	Irakasle gazte-pobreak

Diagrama biliteral hori oso ondo barneratu behar da. Beraz, komenigarria da praktikatzea ikaskide batekin, gelaxken izenak ikasteko. Adibidez, honelako galderei erantzunez: – “Zein da *xy’* gelaxka?” ; – “Zein da *x’y* gelaxka?”. Diagrama biliteralean *hizkiak idatzi gabe* egin behar da hori. Horretarako, eranskinean agertzen diren ereduak eta fitxak erabil daitezke.

Demagun orain honelako esaldiak irudikatu behar ditugula diagrama biliteralean:

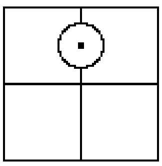
(1) *x* batzuk existitzen dira

(2) Ez da *x*-rik existitzen

(3) *xy* batzuk existitzen dira = Zenbait *x y* dira

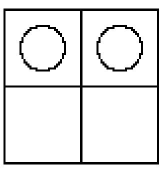
(4) Ez da *xy*-rik existitzen = Ezein *x* ez da *y*

Ikus dezagun, lehenik, nola irudika daitezkeen *existentziaren esaldiak* (1 eta 2):



(1)

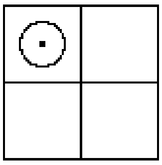
Hemen, honako hau adierazten da: “*x* batzuk existitzen dira”. Fitxa gorri batekin (hemen, puntu batekin) adierazten dugu existentziaren esaldi bat, hau da, gutxienez irakasle zahar bat dagoela.



(2)

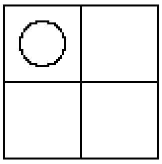
Hemen, kontrakoa adierazten da: “Ez da *x*-rik existitzen”. Fitxa zuri batekin adierazten dugu ez dagoela ezer gelaxka horietan, ez batean, ez bestean, hau da, ez dela irakasle zaharrik existitzen.

Eta orain ikus dezagun nola adierazi *erlazio enuntziatuak* (3 eta 4):



(3)

Hemen adierazten dugu zerbait dagoela x-ren eta y-ren arteko elkargunean. Beraz, bi predikatu erlazionatzen ditugu esateko “x batzuk y dira”, edo “zenbait x y dira”. Gure adibidean: “Zenbait irakasle zahar aberatsak dira”.

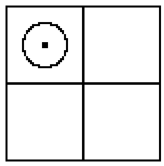


(4)

Hemen, xy elkargunea kontuan hartzen dugu adierazteko hor ez dagoela ezer, hau da, ez dagoela x eta y den elementurik. Beraz, gelaxka hori hutsik dago, eta horrela adierazten dugu: “Ez dira existitzen aldi berean xy direnak” edo “Ezein x ez da y”. Gure adibidean: “Ezein irakasle zahar ez da aberatsa”.

Kontuan hartu behar dugu oso gauza garrantzitsu bat: esaldi batzuen artean berdintza dagoela. Adibidez, hiru esaldi hauek baliokideak dira, eta modu berean adierazten dira diagrama biliteralean:

“Irakasle zaharrak eta aberatsak existitzen dira”.
“Zenbait irakasle zahar aberatsak dira”.
“Zenbait irakasle aberats zaharrak dira”.



Modu honetan, berdintza hauek atera ditzakegu, eta esaldi partikularrak adieraz ditzakegu:

(1) « xy batzuk existitzen dira » = «Zenbait x y dira » = «Zenbait y x dira».
(2) « $x'y$ batzuk existitzen dira » = «Zenbait x' y dira » = «Zenbait y x'dira».
(3) « xy' batzuk existitzen dira » = «Zenbait x y'dira » = «Zenbait y' x dira».
(4) « $x'y'$ batzuk existitzen dira » = «Zenbait x' y'dira » = «Zenbait y' x'dira».

Gauza bera suertatzen da esaldi unibertsal ezezkoekin:

(1) «Ez da xy-rik existitzen » = «Ezein x ez da y» = «Ezein y ez da x».
(2) «Ez da $x'y$-rik existitzen » = «Ezein x' ez da y» = «Ezein y ez da x'».
(3) «Ez da xy'-rik existitzen » = «Ezein x ez da y'» = «Ezein y' ez da x».
(4) «Ez da $x'y'$-rik existitzen » = «Ezein x' ez da y'» = «Ezein y' ez da x'».

Lehenago azaldutakoarekin badakigu E, I eta O motatako esaldiak adierazten:

(E) Unibertsal ezezkoa: «Ezein *x* **ez** da *y*».

(I) Partikular baiezkoa: «Zenbait *x y* dira».

(O) Partikular ezezkoa: «Zenbait *x* **ez** da *y*» = «Zenbait *x y'* dira ».

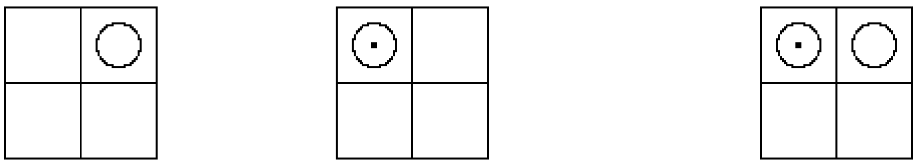
Bukatzeko, azalduko dugu nola adierazi esaldi unibertsal baiezko bat. Lehen esan dugunez, horrelako esaldiak esaldi bikoitzak dira. Beraz, diagrama biliteralean irudikatzeko, hasierako esaldia (A motakoa) bitan banatu behar dugu (I eta E motakoak):

(A) «*x* guztiak *y* dira» = { (I) «Zenbait *x y* dira».
(E) «Ezein *x* **ez** da *y'*» = «Ez dago *xy'*-rik»

Eskema horren arabera, "Irakasle zahar guztiak aberatsak dira" esaldia diagrama biliteralean irudikatu nahi badugu, honela egingo genuke:

(A) "Irakasle zahar guztiak aberatsak dira" = { (I) "Zenbait irakasle zahar aberatsak dira".
(E) "Ezein irakasle zahar **ez** da pobrea".

Beraz, esaldi bat irudikatu beharrean, bi esaldi irudikatu behar ditugu. Eta, gainera –gero ikusiko dugu zergatik–, ezezkoa (E) lehenik, eta baiezkoa (I) bigarrenik:

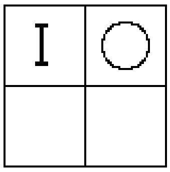


(E) «Ezein *x* **ez** da *y'*» + (I) «Zenbait *x y* dira » ⇨ (A) «*x* guztiak *y* dira »

Kontuz ibili behar dugu (A) motako enuntziatuekin: kasu horretan ez dago berdintzerik: «*x* guztiak *y* dira» ≠ «*y* guztiak *x* dira».

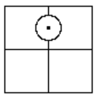
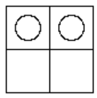
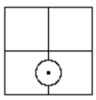
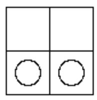
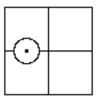
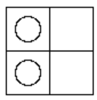
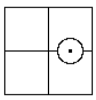
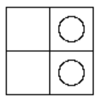
Hemen, existentziaren esaldiak irudikatzeko, ⊙ sinboloa erabiliko dugu, gure jokoan fitxa gorria; eta ez-existentziaren esaldiak irudikatzeko, ○ sinboloa erabiliko dugu, hau da, fitxa zuria. Baina hori egin dezakegu fitxa horiek eskura baditugu (eranskinean agertzen da eredua). Dena den, guk, fitxarik izan ezean, orri batean marraz dezakegu diagrama behar adina aldiz, eta existentziaren esaldiak "I" sinboloarekin irudikatu, eta ez-existentziaren esaldiak "O" sinboloarekin. (Horrela egingo dugu silogismoak irudikatzeko ariketetan). Azken finean, horrela agertzen zaigu landu dugun logika bibalentean (1 eta 0).

Beraz, «*x* guztiak *y* dira » adierazteko, horrela marraz dezakegu gure orrian:

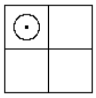
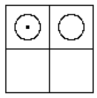
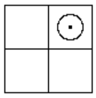
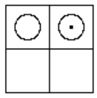
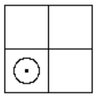
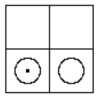
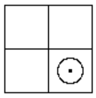
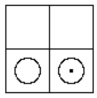
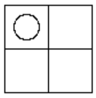
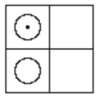
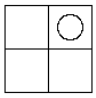
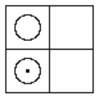
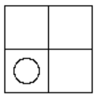
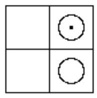
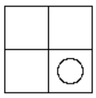
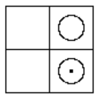
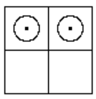
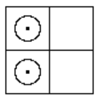
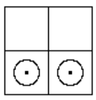
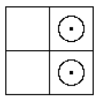


Prozesu hori, hasieran, korapilatsua dela ematen du, baina praktikarekin berehala barneratuko dugu. Horretarako, ariketa asko egin behar ditugu. Lagun batek (inkisidorea) hainbat esaldi esan behar dizkigu (A, E, I eta O motakoak), *x* eta *y* hizkiak erabiliz, eta guk (biktimak) diagrama biliteralean irudikatu behar ditugu esaldi horiek. Begien aurrean, diagrama biliteral huts bat (hizkirik gabe) izango dugu, eta fitxekin adieraziko ditugu esaldi horiek. Inkisidoreak, bere aldetik, aurrean eduki ditzake hemen jarraian agertzen diren taulak, eta, horrela, berehala esango du ondo ala txarto egin dugun. Ariketa horiek egiteko, liburuxka honen bukaeran agertzen den eranskina erabil dezakegu.

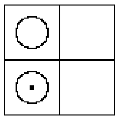
Existentziaren enuntziatuak

x batzuk existitzen dira		Ez da *x*-rik existitzen	
x' batzuk existitzen dira		Ez da *x'*-rik existitzen	
y batzuk existitzen dira		Ez da *y*-rik existitzen	
y' batzuk existitzen dira		Ez da *y'*-rik existitzen	

Erlazioaren enuntziatuak:

Zenbait *xy* existitzen dira = Zenbait *x y* dira = Zenbait *y x* dira		*x* guztiak *y* dira	
Zenbait *xy’* existitzen dira = Zenbait *x y’* dira = Zenbait *y’ x* dira		*x* guztiak *y’* dira	
Zenbait *x’y* existitzen dira = Zenbait *x’y* dira = Zenbait *y x’* dira		*x’* guztiak *y* dira	
Zenbait *x’y’* existitzen dira = Zenbait *x’ y’* dira = Zenbait *y’ x’* dira		*x’* guztiak *y’* dira	
Ez da *xy*-rik existitzen = Ezein *x* ez da *y* = Ezein *y* ez da *x*		*y* guztiak *x* dira	
Ez da *xy’*-rik existitzen = Ezein *x* ez da *y’* = Ezein *y’* ez da *x*		*y* guztiak *x’* dira	
Ez da *x’y*-rik existitzen = Ezein *x’* ez da *y* = Ezein *y* ez da *x’*		*y’* guztiak *x* dira	
Ez da *x’y’*-rik existitzen = Ezein *x’* ez da *y’* = Ezein *y’* ez da *x’*		*y’* guztiak *x’* dira	
Zenbait *x y* dira, eta zenbait *x y’* dira		Zenbait *y x* dira, eta zenbait *y x’* dira	
Zenbait *x’ y* dira, eta zenbait *x’ y’* dira		Zenbait *y’ x* dira, eta zenbait *y’ x’* dira	

Orain arte azaldutakoa da diagrama biliteralari buruz jakin behar dena. Guk bi prozesu hauek menderatu behar ditugu: alde batetik, edozein esaldi emanda, diagrama horretan irudikatzen jakin behar dugu; eta bestetik, kontrako prozesua, hau da, diagraman agertzen den edozein irudikapen emanda, zer esaldi mota adierazten duen jakin behar dugu. Adibidez, jo dezagun diagraman honelako irudia aurkezten digutela :



Guk azkar-azkar jakin behar dugu adierazten den esaldia honako hau dela: «*y* guztiak *x’* dira». Enuntziatua bi esaldi hauetan banatzen da: a) «Zenbait *x’ y* dira», eta b) «Ezein *x* ez da *y*». Halako esaldi bikoitzak agertzen zaizkigunean, hizkiak ordenatu behar ditugu, benetako esaldi unibertsal baiezkoa ondo ateratzeko. Horretarako, ezeztatuta agertzen den hizkia (*x’*) beti bigarren jarriko dugu bi esaldietan:

a) «Zenbait *y x’* dira».
b) «Ezein *y* ez da *x*». ⇨ Beraz, esaldia da: «*y* guztiak *x’* dira».

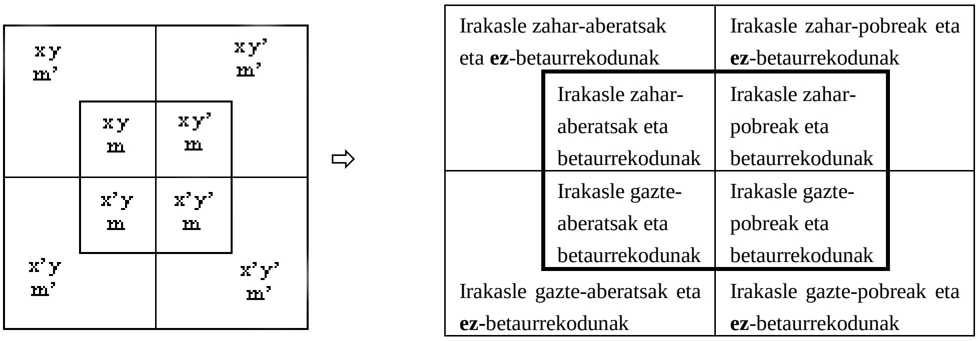
Halako ariketak behin eta berriro eginez gero, berehala ikasiko dugu esaldiak diagrama biliteralean adierazten eta diagraman jarritakoa irakurtzen. Joko hori gauzatzeko, ikaskide edota lagun batekin praktika dezakegu.

4.4.- Diagrama triliterala

Diagrama biliteralak esaldi bat adierazteko balio du. Esaldi bakoitzean bi hizki daude, *x* eta *y*, eta diagrama horretan irudika ditzakegu silogismoan agertzen diren esaldi motak. Kontua da silogismo batean, lehen ikusi dugun bezala, hiru letra agertzen zaizkigula: *x*, *y* eta *m*. Beraz, silogismoak metodo horren bidez ebazteko, ez da nahikoa diagrama biliterala menderatzea, triliterala ere menderatu behar da. Adibidez, hasieran jarritako adibidean beste predikatu bat sartzen badugu, aukera gehiago izango ditugu. Aurrerago ikusi dugun bezala, bi hizki bateratzerakoan, lau aukera ditugu:

	y	y’
x	Irakasle zahar-aberatsak	Irakasle zahar-pobreak
x’	Irakasle gazte-aberatsak	Irakasle gazte-pobreak

Demagun, oraingoan, unibertso horretan hirugarren predikatu bat sartzen dugula, *m* = “betaurrekoduna”. Horrenbestez, zortzi aukera izango genituzke:



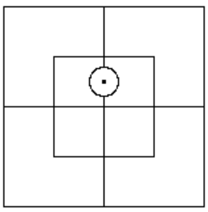
Orain, erdiko koadroan dagoenak *m* adierazten du, eta koadro horretatik kanpo dagoenak *m’* adierazten du; beraz, betaurrekoduna dela irudikatzeko, erdiko koadroaren barruan jarriko dugu fitxa, eta ez-betaurrekoduna dela adierazteko, erdiko koadrotik kanpo jarriko dugu fitxa. Diagrama triliteral horrekin biliteralarekin bezala jokatu behar dugu. Horretarako, *hizkirik gabeko* diagrama bat hartu behar dugu (eranskinean agertzen da), eta esaldiak nola irudikatzen diren ikasi. Esaldiek bi termino izango dituzte, eta horietako bat *m* edo *m’* izan behar da. Azken finean, horiek dira silogismoetan agertzen diren enuntziatuak. Ikus ditzagun adibide batzuk:

(1) «Zenbait *x m* dira».

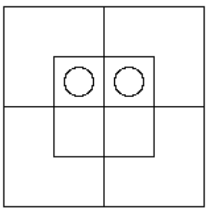
(2) «Ezein *x* ez da *m*».

(3) «*x* guztiak *m* dira».

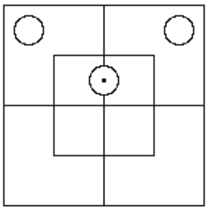
Honela irudikatuko genituzke:



Hemen, irudikatzen ari gara *x*-ren bat dagoela, eta, gainera, *x* hori *m* dela. Beraz, irudikatuta dauden esaldiak honako hauek dira: «Zenbait *x m* dira», «Zenbait *m x* dira» edo «Existitzen dira *x* batzuk *m* direnak». Jarritako adibidean, esaldi hau izango genuke: “Zenbait irakasle zahar betaurrekodunak dira”.

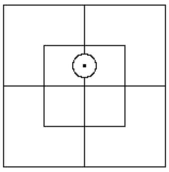
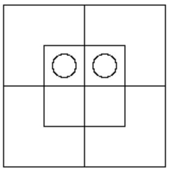
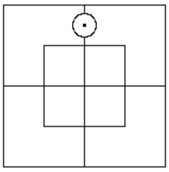
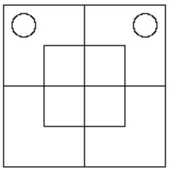
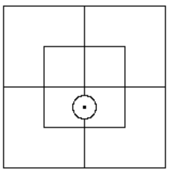
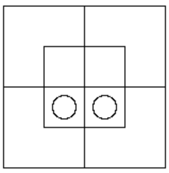
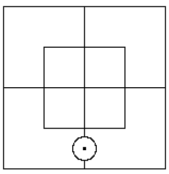
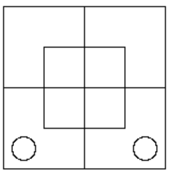
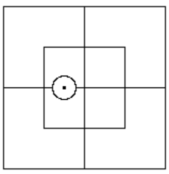
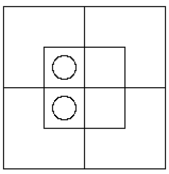


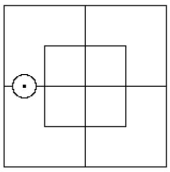
Hemen, kontrakoa adierazten ari gara: ez da existitzen *xm* den elementurik. Diagrama triliteralean bi terminoko elementurik ez dagoela adierazteko, bi fitxa zuri erabili behar ditugu. Zera irudikatzen dugu: «Ezein *x* ez da *m*» edo «Ezein *m* ez da *x*». Gure adibidean, esaldi hau ateratzen zaigu: “Ezein irakasle zahar ez da betaurrekoduna”.



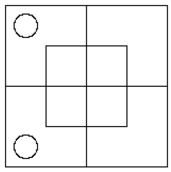
Eta hemen, (A) motako enuntziatu bat dugu, hau da, unibertsal baiezkoa. Esaldi hori adierazteko, bi esaldi irudikatu behar ditugu, (A) motako esaldiak bikoitzak baitira. Beraz, diagrama triliteralean hiru fitxa erabiliko ditugu. Hemen adierazita dagoena zera da: «x guztiak m dira», eta bi esalditan banatzen da: (1) «Zenbait x m dira» eta (2) «Ezein x ez da m'». Gure adibidean, hau izango litzateke esaldia: “Irakasle zahar guztiak betaurrekodunak dira”.

Oraingoan ere, lagun edo ikaskide bat bilatu behar dugu, inkisidorearena egiteko, eta behin eta berriro galdetuko du nola irudikatu behar diren esaldiak diagrama triliteralean, eta, horrela, guk ondo ikasiko dugu. Jarraian agertzen dira aukera guztiak:

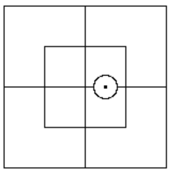
 Zenbait xm existitzen dira. = Zenbait x m dira. = Zenbait m x dira.	 Ez da xm-rik existitzen. = Ezein x ez da m. = Ezein m ez da x.
 Zenbait xm' existitzen dira. = Zenbait x m' dira. = Zenbait m' x dira.	 Ez da xm'-rik existitzen. = Ezein x ez da m'. = Ezein m' ez da x.
 Zenbait $x'm$ existitzen dira. = Zenbait $x'm$ dira. = Zenbait m x' dira.	 Ez da $x'm$-rik existitzen. = Ezein x' ez da m. = Ezein m ez da x'.
 Zenbait $x'm'$ existitzen dira. = Zenbait x' m' dira. = Zenbait m' x' dira.	 Ez da $x'm'$-rik existitzen. = Ezein x' ez da m'. = Ezein m' ez da x'.
 Zenbait ym existitzen dira. = Zenbait y m dira. = Zenbait m y dira.	 Ez da ym-rik existitzen. = Ezein y ez da m. = Ezein m ez da y.



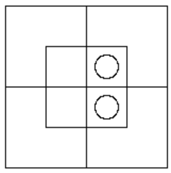
Zenbait *ym’* existitzen dira.
= Zenbait *y m’* dira.
= Zenbait *m’ y* dira.



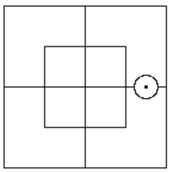
Ez da *ym’*-rik existitzen.
= Ezein *y* ez da *m’*.
= Ezein *m’* ez da *y*.



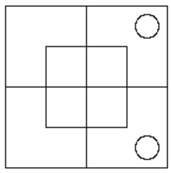
Zenbait *y’m* existitzen dira.
= Zenbait *y’ m* dira.
= Zenbait *m y’* dira.



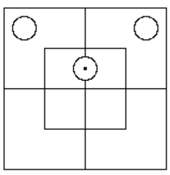
Ez da *y’m*-rik existitzen.
= Ezein *y’* ez da *m*.
= Ezein *m* ez da *y’*.



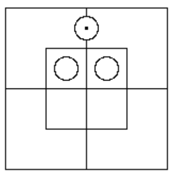
Zenbait *y’m’* existitzen dira.
= Zenbait *y’ m’* dira.
= Zenbait *m’ y’* dira.



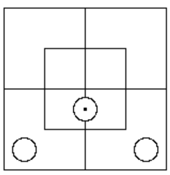
Ez da *y’m’*-rik existitzen.
= Ezein *y’* ez da *m’*.
= Ezein *m’* ez da *y’*.



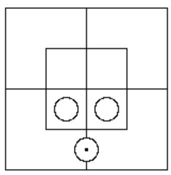
x guztiak *m* dira.



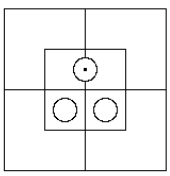
x guztiak *m’* dira.



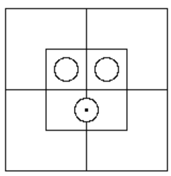
x’ guztiak *m* dira.



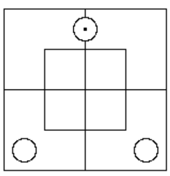
x’ guztiak *m’* dira.



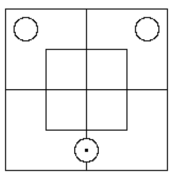
m guztiak *x* dira.



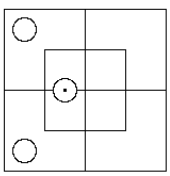
m guztiak *x’* dira.



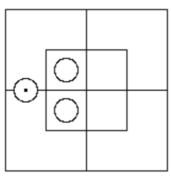
m’ guztiak *x* dira.



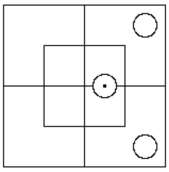
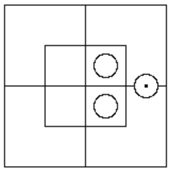
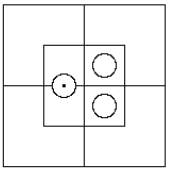
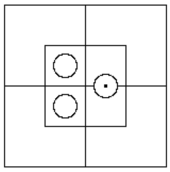
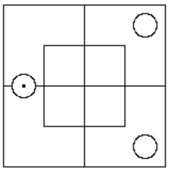
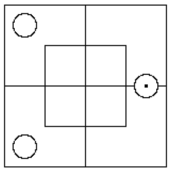
m’ guztiak *x’* dira.



y guztiak *m* dira.



y guztiak *m’* dira.

 *y'* guztiak *m* dira.	 *y'* guztiak *m'* dira.
 *m* guztiak *y* dira.	 *m* guztiak *y'* dira.
 *m'* guztiak *y* dira.	 *m'* guztiak *y'* dira.

4.5.- Silogismoen ebazpena

1. <u>SILOGISMOA</u>

Orain ikus dezagun nola erabili diagrama triliterala silogismo bat egiteko. Demagun bi premisa hauetatik konklusioa atera nahi dugula:

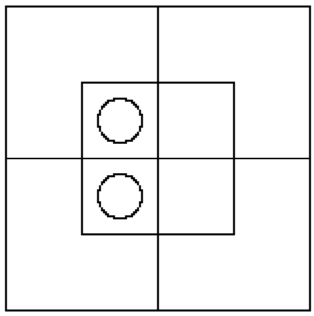
$\mathbf{P_1}$: "Zenbait politikari egiazaleak dira".
$\mathbf{P_2}$: "Ezein politikari ez da haserrekorra".

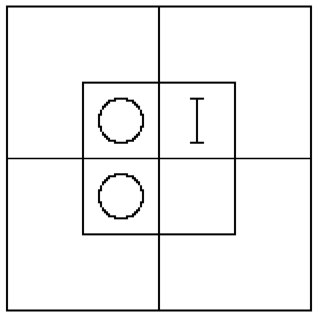
Egin behar dugun lehenengo gauza terminoak identifikatzea da. Errepikatzen dena termino ertaina da (*m*); P1 esaldian dagoena, termino nagusia (*x*); eta P2 esaldian dagoena, termino txikia (*y*). Horren arabera, eskema hau daukagu:

$\mathbf{P_1}$: «Zenbait *m* *x* dira».
$\mathbf{P_2}$: «Ezein *m* ez da *y*».

Hiztegia: *x* = egiazalea izan. *y* = haserrekorra izan. *m* = politikaria izan.

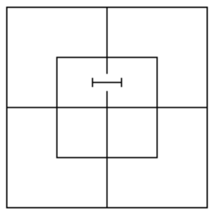
Gero, diagrama triliteralean irudikatu behar ditugu bi esaldi horiek. Hemendik aurrera, badakigunez esaldiak diagrama batean irudikatzen, ez da beharrezkoa fitxekin aritzea; koaderno batean marraz ditzakegu. Beraz, «⊙» sinboloa (fitxa gorria) adierazteko, «I» sinboloarekin ordezkatuko dugu (fitxekin ere egin dezakegu). Dena dela, esan dugun moduan, esaldiak irudikatzeko orduan, beti ordena bati jarraitu behar diogu: ezezko esaldi bat badago, hori irudikatu behar dugu lehena. Beraz, P_2 esaldiarekin hasiko gara, eta gero P_1 irudikatuko dugu.





P_2 P1 +P_2

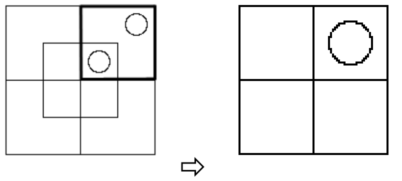
Berez P_1 premisaren irudikapena hau da:



Baina, *xym* gelaxka okupatuta dagoenez, eskuinerantz pasatuko dugu marka, eta *xy'm* gelaxkan jarriko dugu (P1 + P_2 irudian ikus dezakegunez).

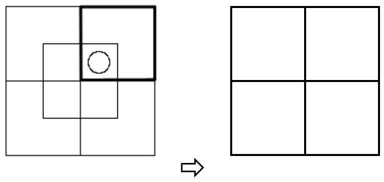
Orain, prozesua bukatzeko, diagrama triliteralean daukagun informazioa (P1+P_2 irudian agertzen dena), diagrama biliteralera pasatu behar dugu, hau da, diagrama triliterala interpretatu behar dugu *x* eta *y* besterik ez duen esaldi bat lortzeko. Eta esaldi hori silogismoaren konklusioa izango da.

«I» sinboloa diagrama triliteralaren edozein lekutan agertzen bada, orduan diagrama biliteralean derrigor adierazi behar dugu dagokion gelaxkan. Eta «O» sinboloa agertzen bada, diagrama biliteralean ere adierazi behar dugu, baina kasu horretan diagrama triliteralaren gelaxka nagusiaren bi eremuak okupatu behar ditu. Hona hemen irizpidea:



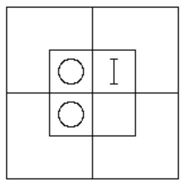
Hemen, goiko eta eskuineko gelaxka nagusian bi «O» agertzen dira; beraz, diagrama biliteralean leku horretan «O» sinboloa irudikatuko dugu.

Baina honela agertzen bada, orduan ez dugu adieraziko ezer diagrama biliteralean:

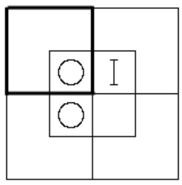


Hemen, goiko eta eskuineko gelaxka nagusian, «O» bat besterik ez da agertzen; beraz, ezin dugu adierazi ezer diagrama biliteralean.

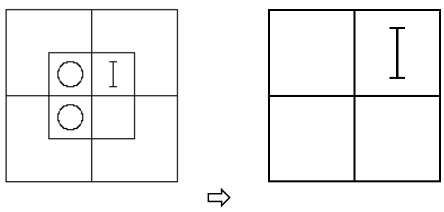
Ikus dezagun nola jokatu jarritako adibidean: silogismoaren bi premisak honela irudikatu ditugu diagrama triliteralean:



Orain, ondo aztertu behar ditugu diagrama triliteralak dituen lau gelaxka nagusiak; adibidez, hau da lehenengoa:



Horren arabera, eta lau gelaxka nagusiak aztertuta, diagrama triliteralean daukagun informazioa honela irudikatuko dugu diagrama biliteralean:



Eta diagrama biliteralean irudikatuta dagoena silogismoaren konklusioa da; adierazten dena zera da: «Zenbait *x y'* dira». Beraz, guk adierazitako hiztegia kontuan hartuta, hau da silogismoa:

$\mathbf{P_1}$: «Zenbait *m x* dira».	⇨	$\mathbf{P_1}$: “Zenbait politikari egiazaleak dira”.
$\mathbf{P_2}$: «Ezein *m* ez da *y*».	⇨	$\mathbf{P_2}$: “Ezein politikari ez da haserrekorra”.
----------------------------		---
K: «Zenbait *x y'* dira».	⇨	**K**: “Zenbait egiazale ez da haserrekorra”.

Hasieran, oso prozesu korapilatsua irudi dakiguke, baina, praktikarekin, edozein silogismoren konklusioa atera dezakegu. Ikus dezagun adibide gehiago.

2. SILOGISMOA

Hau oso erraza da eta intuitiboki jakin dezakegu konklusioa zein den.

P$_1$: "Katu guztiek frantsesa ulertzen dute".
P$_2$: "Zenbait ugaztun katuak dira".

K: ?????

Hiztegia: *x* = frantsesa ulertzen duen izakia.

y = ugaztuna izan. *m* = katua izan.

Atera dezagun eskema logikoa:

P$_1$: «*m* guztiak *x* dira».
P$_2$: «Zenbait *y m* dira».

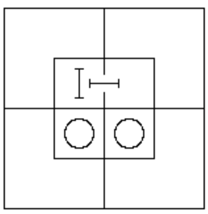
Eta, orain, diagrama triliteralean irudikatzeko ordena zehaztu behar dugu, kontuan hartuz P1 esaldi unibertsal baiezkoa dela eta, beraz, esaldi bikoitza:

P$_1$: (P$_1$.a) «Zenbait *m x* dira» + (P$_1$.b) «Ezein *m* ez da *x'*».
P$_2$: «zenbait *y m* dira».

Beraz, hiru enuntziatu irudikatu behar ditugu, eta diagraman adierazteko ordena honako hau da:

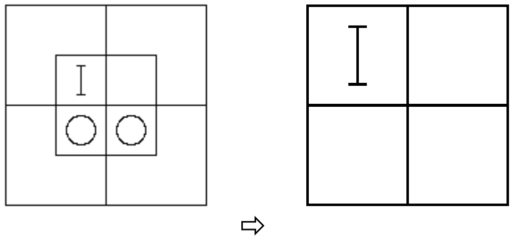
(P$_1$.b): «Ezein *m* ez da *x'*».
(P$_1$.a): «Zenbait *m x* dira».
P$_2$: «Zenbait *y m* dira».

Hori eginez gero, honela aterako zaigu irudikapena:



Berez, *xym*-ren eta *xy'm*-ren arteko mugan dagoen markak (I) ez du ezer adierazten. Horrenbestez, hobe da irudikatzeko orduan ordena honi jarraitzea: lehenik

P$_1$.b, gero **P$_2$**, eta, azkenik, **P$_1$.a**. Era honetan, **P$_1$.a**-k adierazten duenak ez du garrantzirik, **P$_2$**-k dagoeneko adierazi baitu[38]. Honela geratzen da:



Eta diagrama biliteralean *xy* gelaxka geratzen da okupatuta. Beraz, silogismoaren konklusioa hau da: (1) «Zenbait *x y* dira» edo (2) «Zenbait *y x* dira». Gure hiztegia ikusi ondoren, bigarren aukera dotoreagoa geratzen da. Hortaz, hau da konklusioa: “Zenbait ugaztunek frantsesa ulertzen dute”.

P$_1$: “Katu guztiek frantsesa ulertzen dute”.
P$_2$: “Zenbait ugaztun katuak dira”.

K: “Zenbait ugaztunek frantsesa ulertzen dute”.

3.SILOGISMOA

P$_1$: “Ezein ikasle ez da ganorabakoa”.
P$_2$: “Jendeak errespetu handiz tratatzen ditu pertsona arduratsuak”.

K: ?????

Hiztegia:	x = ikaslea izan.	m = arduratsua izan.
	y = errespetuz tratatua izan.	m' = ganorabakoa izan.

Bigarren esaldiaren forma normala kontuan hartu behar dugu:

P$_2$: “Jendeak errespetu handiz tratatzen ditu pertsona arduratsuak”. =
P$_2$: “Pertsona arduratsu *guztiak* dira jendeak errespetuz tratatzen dituenak”.

Atera dezagun orain eskema logikoa:

P$_1$: «Ezein x ez da m'».
P$_2$: «m guztiak y dira».

Eta, orain, diagrama triliteralean irudikatzeko ordena zehaztu behar dugu, kontuan hartuz P$_2$ esaldi unibertsal baiezkoa dela eta, beraz, esaldi bikoitza:

P$_1$: «Ezein x ez da m'».
P$_2$: (P$_2$.a) «Zenbait m y dira» + (P$_2$.b) «Ezein m ez da y'».

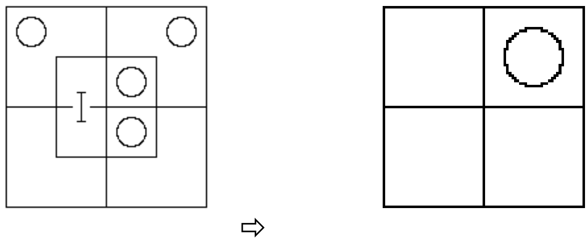
---

[38] **P$_1$.a**-k zera adierazten du: diagrama triliteralean *xym* edo *xy'm* gelaxketan zerbait dagoela, *zehaztu gabe* zeinetan. Baina **P$_2$**-k *ziurtatzen* du *xym* gelaxkan zerbait dagoela, *x'ym* gelaxka okupatuta dagoelako.

Beraz, hiru enuntziatu irudikatu behar ditugu, eta diagraman adierazteko ordena honako hau da:

P_1: «Ezein *x* ez da *m’*».
(P_2.b): «Ezein *m* ez da *y’*».
(P_2.a): «Zenbait *m y* dira».

Hori eginez gero, honela aterako zaigu irudikapena:



Ezin dugu zehaztu non jarri behar dugun diagrama triliteralaren *ym* gelaxketan dagoen marka (I): *xym* gelaxkan edo *x’ym*-n; hori dela eta, ezin dugu adierazi ezer diagrama biliteralean. Hortaz, diagrama biliteralean *xy’* gelaxka bakarrik geratzen da okupatuta. Beraz, silogismoaren konklusioa hau da: «Ezein *x* ez *da y*’» edo «Ezein *y’* ez *da x*». Gure hiztegia ikusi ondoren, lehenengo esaldian dagoen moduan jarriko dugu (*x* eta *y* hizkiak agertzen direnean eta horietako batek besterik ez badu apostrofea, orduan apostrofea duena beti bigarren lekuan jarri behar da). Hortaz, hau da konklusioa: «Ezein *x* ez *da y*’».

P_1: «Ezein *x* ez da *m’*».	⇨	**P_1**: “Ezein ikasle ez da ganorabakoa”.
P_2: «*m* guztiak *y* dira».	⇨	**P_2**: “Pertsona arduratsuak errespetu handiz tratatzen ditu jendeak”.
------------------------------		---
K: «Ezein *x* ez *da y*’ ».	⇨	**K**: “Ezein ikasle ez da errespeturik gabe tratatua izaten”.

4. SILOGISMOA

Orain, egin dezagun hasieran planteatu dugun silogismo klasikoa:

- **P_1**: Gizaki guztiak hilkorrak dira.
- **P_2**: Sokrates gizakia da.

- **K**: Sokrates hilkorra da.

Jarritako konklusioa ondo dagoen egiaztatuko dugu. Horretarako, lehenengo pausoa da esaldien forma normala ateratzea:

P_1: Gizaki *guztiak* hilkorrak dira.
P_2: Sokrates den *guztia* gizakia da.

K: ????????????

Hiztegia: *x* = hilkorra izan. *y* = Sokrates izan. *m* = gizakia izan.

Atera dezagun eskema logikoa:

P_1: «*m* guztiak *x* dira».
P_2: «*y guztiak m* dira».

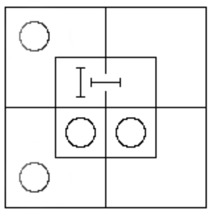
Eta, orain, diagrama triliteralean irudikatzeko ordena zehaztu behar dugu, kontuan hartuz bi premisak enuntziatu unibertsal baiezkoak direla eta, beraz, esaldi bikoitzak:

P_1: (P_1.a) «zenbait *m x* dira» + (P_1.b) «ezein *m* ez da *x'*».
P_2: (P_2.a) «zenbait *y m* dira» + (P_2.b) «ezein *y* ez da *m'*».

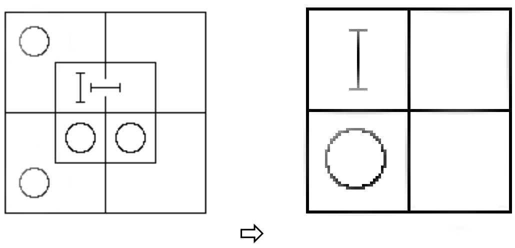
Hori dela eta, lau enuntziatu irudikatu behar ditugu, eta diagraman adierazteko ordena honako hau da:

(P_1.b): «ezein *m* ez da *x'*».
(P_2.b): «ezein *y* ez da *m'*».
(P_1.a): «zenbait *m x* dira».
(P_2.a): «zenbait *y m* dira».

Hori eginez gero, honela aterako zaigu irudikapena:



Berez, *xym*-ren eta *xy'm*-ren arteko mugan dagoen markak (I) ez du ezer adierazten. Honela geratzen da diagrama biliterala:



Eta diagrama biliteralaren arabera, bi esaldi ateratzen zaizkigu: K_1: «zenbait *y* *x* dira» eta K_2: «ezein *y* ez da *x'*». Silogismoaren konklusioa enuntziatu bikoitza denez, emaitza esaldi unibertsal baiezkoa da: «*y* guztiak *x* dira»[39]. Gure hiztegia berrikusi ondoren, honako hau da konklusioa: “Sokrates den guztia hilkorra da”.

P₁: «*m* guztiak *x* dira».	⇨	**P₁**: “Gizaki guztiak hilkorrak dira”.
P₂: «*y* guztiak *m* dira ».	⇨	**P₂**: “Sokrates gizakia da”.
------------------------------		--
K: «*y* guztiak *x* dira».	⇨	**K**: “Sokrates hilkorra da”.

5. SILOGISMOA

Silogismo baten eskema logikoa, gehienetan, ondo ikusten da. Baina, beste batzuetan, tranparen bat izaten du, eta oso erraz oker gaitezke. Ikus dezagun adibide bat.

P_1: “Nik margolan horiek miresten ditut”.
P_2: “Zerbait miresten dudanean, sakonki aztertzen dut”.

K: ?????

Hiztegia: *x* = margolan horiek. *m* = nik miretsitakoa.

y = nik sakonki aztertzea.

Esaldiaren forma normala atera behar dugu:

P_1: “Margolan horiek *guztiak* miresten ditut”.
P_2: “Miresten dudan *guztia* sakonki aztertzen dut”.

Adibide horretan, tranpa txiki bat daukagu **P_2** esaldian: “Zerbait” hitza agertzen denez, pentsa dezakegu esaldi partikularra dela, eta ez da horrela kasu horretan. Benetako esanahia “miresten dudan *guztia*” da, eta, beraz, esaldi unibertsal baiezkoa da.

Hortaz, silogismoak honako eskema logikoa dauka:

P_1: «*x* guztiak *m* dira».
P_2: «*m* guztiak *y* dira».

Eta, orain, diagrama triliteralean irudikatu behar ditugu, kontuan hartuz biak esaldi unibertsal baiezkoak direla, eta, beraz, esaldi bikoitzak:

[39] Kasu honetan, bi esaldi ateratzen zaizkigu konklusio moduan. Eta badago arrisku bat: «*y* guztiak *x* dira» esaldia «*x* guztiak *y* dira» esaldiarekin nahastea. Eta ez dira berdinak. Nahasketa hori gerta ez dadin, konklusioaren bi esaldiak ondo ordenatu behar ditugu: lehenengo, ezezkoa idatzi, eta apostrofea daraman terminoa bigarren lekuan jarri behar dugu beti; gero, beste esaldian, baiezkoan, aurreko esaldiaren terminoen ordena errespetatu behar dugu (kasu horretan *y* lehenengo, eta, gero, *x* terminoa).

(P_1.a): «Zenbait *x m* dira».
(P_1.b): «Ezein *x* ez da *m'*».
(P_2.a): «Zenbait *m y* dira».
(P_2.b): «Ezein *m* ez da *y'*».

Ondoren, atera zaizkigun lau esaldiak ordenatu behar ditugu, diagrama triliteralean ondo irudikatzeko:

(P_1.b): «Ezein *x* ez da *m'*»
(P_2.b): «Ezein *m* ez da *y'*»
(P_1.a): «Zenbait *x m* dira».
(P_2.a): «Zenbait *m y* dira».

Hori eginez gero, honela aterako zaigu irudikapena:

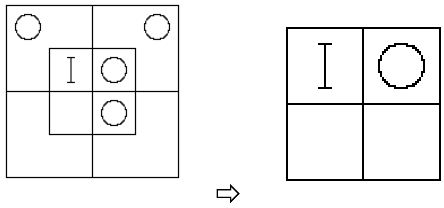


Diagrama biliteralean bi marka ateratzen direnez, silogismoaren emaitza enuntziatu bikoitza da. Hauek dira bi esaldiak: «Ezein *x* ez da *y'*» eta «zenbait *x y* dira». Beraz, enuntziatu unibertsal baiezkoa da, eta honako eskema logikoa dauka: «*x* guztiak *y* dira». Gure hiztegia ikusi ondoren, konklusio hau ateratzen dugu: «Margolan horiek guztiak sakonki aztertzen ditut».

P_1: «*x* guztiak *m* dira». ⇨ **P_1**: "Nik margolan horiek miresten ditut".
P_2: «*m* guztiak *y* dira». ⇨ **P_2**: "Zerbait miresten dudanean, sakonki aztertzen dut".
---------------------------- ---
K: «*x* guztiak *y* dira». ⇨ **K**: "Margolan horiek guztiak sakonki aztertzen ditut".

6. SILOGISMOA

Silogismo hau oso erraza da, eta intuitiboki jakin dezakegu konklusioa zein den.

P_1: "Ezein tripontzi ez da osasuntsua".
P_2: "Ezein pertsona gaixoti ez da indartsua".

K: ?????????.

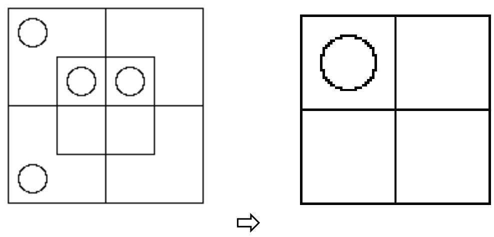
Kasu horretan, forma normalean adierazita ditugu esaldiak. Beraz, terminoak identifikatu behar ditugu.

Hiztegia: *x* = tripontzia izan. *y* = indartsua izan.
m = osasuntsua izan. *m´*= gaixotia izan.

Atera dezagun eskema logikoa:

P$_1$: «Ezein x ez da *m*».
P$_2$: «Ezein *m'* ez da *y*».

Honela aterako zaigu irudikapena:



Eta diagrama biliteralaren arabera, honako esaldi hau ateratzen zaigu: «Ezein *x* ez da *y*». Gure hiztegia berrikusi ondoren, honako hau da konklusioa: “Ezein tripontzi ez da indartsua”.

P$_1$: «Ezein *x* ez da *m*».	⇨	**P$_1$**: “Ezein tripontzi ez da osasuntsua”.
P$_2$: «Ezein *m'* ez da *y*».	⇨	**P$_2$**: “Ezein pertsona gaixoti ez da indartsua”.
------------------------------		---
K: «Ezein *x* ez da *y*».	⇨	**K**: “Ezein tripontzi ez da indartsua”.

7. SILOGISMOA

Eguneroko bizitzan, maiz erabiltzen dira silogismo-egitura daukaten hainbat argudio. Askotan, ateratako konklusioa ez da zuzena, eta, batzuetan, ez dago ezta konklusiorik ere. Argudio horiek engainagarriak dira eta teknikoki *falaziak* deitzen dira. Horrelako argudio bat ikusiko dugu jarraian. Silogismoaren forma dauka, eta, itxuraz, ematen du bi premisetatik konklusioa ateratzen dela. Baina ez da horrela: bi premisetatik ez da ezer ondorioztatzen. Hala dela egiaztatzeko, diagrama triliteralean irudikatu besterik ez dugu egin behar. Halako argudioak sarritan entzuten dira komunikabideetan eta politikarien adierazpenetan, –jakina, diskurtsoan apur bat sakontzen badute–. Ikus dezagun adibide bat:

P$_1$: “Ezein politikari ez da lapurra”.
P$_2$: “Ezein politikari ez da gezurtia”.

K: ?????????.

Oraingoan ere, esaldiak forma normalean adierazita daude. Beraz, terminoak identifikatu behar ditugu.

Hiztegia: *x* = lapurra izan. *y* = gezurtia izan. *m* = politikaria izan.

Atera dezagun eskema logikoa:

P$_1$: «Ezein *m* ez da *x*».
P$_2$: «Ezein *m* ez da *y*».

Eta honela aterako zaigu irudikapena:

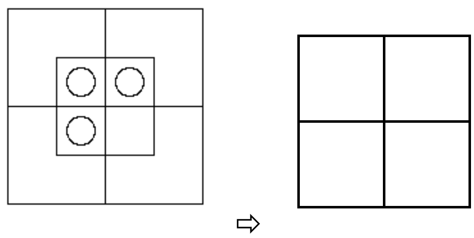


Diagrama triliteralean dagoen informazioarekin, ezin dugu irudikatu ezer diagrama biliteralean. Beraz, emandako bi premisa horietatik, ezin da atera konklusiorik. Batzuek pentsa dezakete konklusio logikoa hau dela: “Ezein lapur ez da gezurtia”, baina txarto dago.

8. SILOGISMOA

Ikus dezagun, azkenik, beste adibide bat, konklusiorik ez duena:

P$_1$: “Kazetari guztiek badakite hitz egiten”.
P$_2$: “Zenbait argazkilari ez dira kazetari”.

K: ?????????.

Esaldien terminoak identifikatu behar ditugu:

Hiztegia: *x* = hitz egiten jakitea. *y* = argazkilaria izan. *m* = kazetaria izan.

Kontuan hartuta P_1-en forma normala dela “Kazetari guztiak hitz egiten dakiten horietakoak dira”, atera dezagun eskema logikoa:

P_1: «*m* guztiak *x* dira». = (P_1.a) «Zenbait *m* *x* dira» + (P_1.b) «Ezein *m* ez da *x’*»
P_2: «Zenbait *y* ez da *m* ». = «Zenbait *y* *m’* dira»

Eta honela aterako zaigu irudikapena:

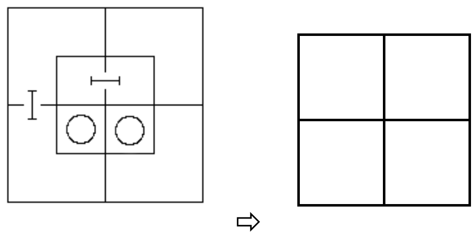


Diagrama triliteralean dagoen informazioarekin, ezin dugu ezer irudikatu diagrama biliteralean. Beraz, emandako bi premisa horietatik, ezin da konklusiorik atera. Batzuek pentsa dezakete konklusio logikoa hau dela: “Zenbait argazkilarik ez dakite hitz egiten”, baina txarto dago.

Silogismo gehiago egiteko, ikus ezazu 2. eranskina.

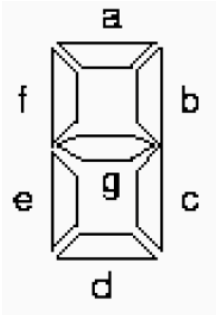
5.- KONKLUSIOA

5.- Konklusioa: Logika formala eta gure gaur egungo bizitza

Lan honen helburua da logikara modu ludikoan hurbiltzea. Logikak, zientzia formala den aldetik, garrantzi handia dauka gure eguneroko bizitzan. Gaur egun, informazioaren garaian bizi gara, eta, iristen zaigun informazio kantitate itzela kudeatzeko, prozesu logikoak erabiltzen dira, esate baterako, Zibernetika arloan. Hori dela eta, gaur egungo gizartean, Logika formalean oinarritzen dira oso garrantzitsuak diren arlo asko: komunikazio-sistemak, genomika eta bioinformatika, kontrolatzeko eta programatzeko sistemak, inteligentzia artifiziala, eta abar. Beraz, horiek menderatzeko, ezinbestekoa da Logika lantzea.

Horren adibide sinple baina adierazgarria jarriko dugu: guk erabiltzen ditugun aparatu informatikoek (*hardware* izenekoak) programa logikoak (*software*ak) behar dituzte funtzionatzeko, eta, programa horiek Logikaren legeak eta erregelak errespetatu ezean, aparatuek ez dute ondo funtzionatuko. Hori gertatuz gero, esaten da programak *computer bug* (akatsa) daukala . Ordenagailuetarako programak egiteko, Logika formala ezagutu behar dugu lengoaia berezi baten gisara. Beraz, gaur egun, informatikaren garaian, inoiz baino gehiago ikusten da Logikaren garrantzia; azken finean, ordenagailuek logika bibalentearekin egiten dute lan: 1 eta 0 erabiliz. Tresna elektronikoen zirkuituetan, espresio logiko anitz erabili behar dira; bestela, ez dira ibiltzen. Horregatik, zirkuitu elektronikoak zirkuitu logikoak deitzen dira. Adibidez, zirkuitu digital batean, “1”-ak esan nahi du korrontea pasatu ahal dela, eta “0”-ak esan nahi du kontrakoa, hau da, ezin dela korrontea pasatu.

Kontzeptua ulertzea erraza izan arren, gero, praktikan jartzean, askoz gehiago konplikatzen da. Adibidez, erloju elektroniko baten digitu bat diseinatzeko, taula logiko asko egin behar dira. Har dezagun zenbaki digital baten goiko segmentua (a):



Alde batetik, jakin behar dugu a segmentua piztuta agertuko dela 0, 2, 3, 5, 6, 7, 8 eta 9 zenbakiak erabili behar direnean, eta 1 eta 4, berriz, itzalita; eta horrela jokatu behar da segmentu guztiekin. Beste aldetik, hamar zenbaki direnez, prestatu behar dugun egia-taulak gutxienez hamar aukera izan behar ditu. Beraz, digitu baten zazpi segmentuak noiz piztu eta noiz itzali behar diren programatzeko, honelako taula logikoa diseinatu beharko genuke:

ZENBAKI BITARRAK				ZENBAKI HAMARTARRAK	L.E.D. (zenbakiaren segmentu ezberdinak)						
					a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0
0	0	1	0	2	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	3	1	1	1	1	0	0	1
0	1	0	0	4	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	5	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	6	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	7	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	8	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	9	1	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	10	X	X	X	X	X	X	X
1	0	1	1	11	X	X	X	X	X	X	X
1	1	0	0	12	X	X	X	X	X	X	X
1	1	0	1	13	X	X	X	X	X	X	X
1	1	1	0	14	X	X	X	X	X	X	X
1	1	1	1	15	X	X	X	X	X	X	X

Taularen lerro kopurua zehazteko, dakigun bezala, 2^n formula aplikatu behar dugu; kasu honetan, hamar zenbaki ezberdin programatzeko (0tik 9ra), gutxienez, hamar lerro behar ditugu; beraz, $2^4 = 16$ lerro jarri beharko ditugu ($2^3 = 8$ jarriz gero, ez baita ailegatzen 10 zenbakiraino). Hamasei zenbaki horietatik, bakarrik lehenengo hamarrak interesatzen zaizkigu. Gainerako seiak interesik gabekoak dira (erredundantziak). Hizkien zutabeei erreparatuz gero, ikusiko dugu, zenbaki hamartar bakoitzeko, zein segmentu egon behar diren piztuta (1) eta zein itzalita (0). Izan ere, zenbaki digital baten segmentuak programatzeko, honelako taula egin behar da.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Z.hamartarra
▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼	▼	
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	Z. bitarra

Ikusten dugun bezala, Logika formalaren ondorio praktiko edota teknologikoak nahiko korapilatsuak dira, baina gaur egungo munduan Logikaren garrantzia erakusten digute. Teknologia-munduan Logikak zer-nolako garrantzi praktikoa duen ikusita, guk, lan xume honetan, logikaren alde ludikoa azpimarratu eta jorratu nahi izan dugu. Azken buruan, Logika lengoaia bat da, eta lengoaia jolasean ikasten da ondoen, edo, behintzat, hori da nire iritzia.

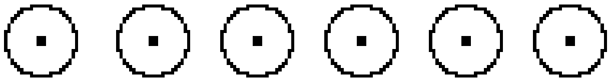
Behin honaino helduz gero, ez dugu inolako arazorik izango asmakizun hau ebazteko. Nik esaten badut: “Behin batean, zaldunen eta ezkutarien uhartean nengoela, bi biztanlerekin egin nuen topo, A eta B. Honela esan zidaten: A: – “B ezkutaria da”, eta B: –“A zalduna da”. Hona hemen galdera batzuk: “Zer da A?”, “Zer da B?” eta, azkenik, “Zer naiz ni?”.[40]

Roberto Hernáez.

Vitoria-Gasteiz, 2009ko abendua.

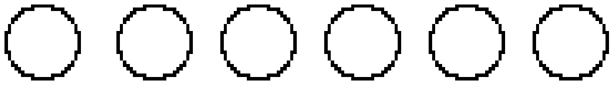
[40] Liburuxka hau irakurri ondoren, irakurleak ez du izango inolako arazorik hiru galdera horiei erantzuteko. Baina, ondo egin duela egiaztatzeko, ikus dezala RAYMOND SMULLYAN, *¿Cómo se llama este libro?*, Cátedra, Madrid,1981, 266. or.

6.- ERANSKINAK



FITXA GORRIAK

Fitxa gorriek adierazten dute zerbait existitzen dela (kolorezta itzazu).



FITXA ZURIAK

Fitxa zuriek adierazten dute ezer ez dela existitzen.

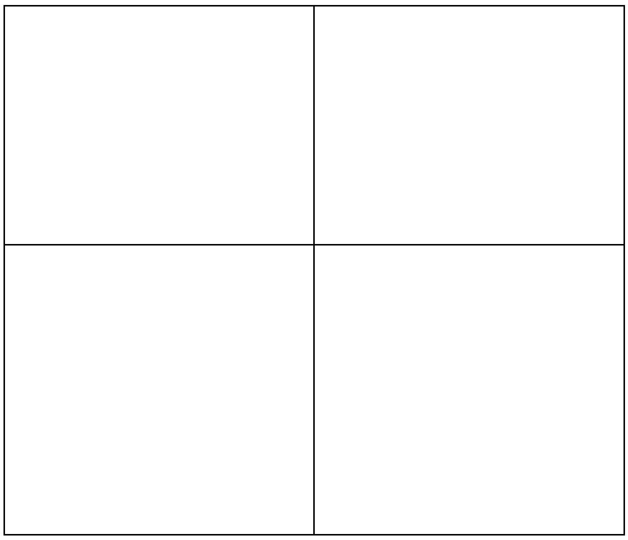


DIAGRAMA BILITERALA

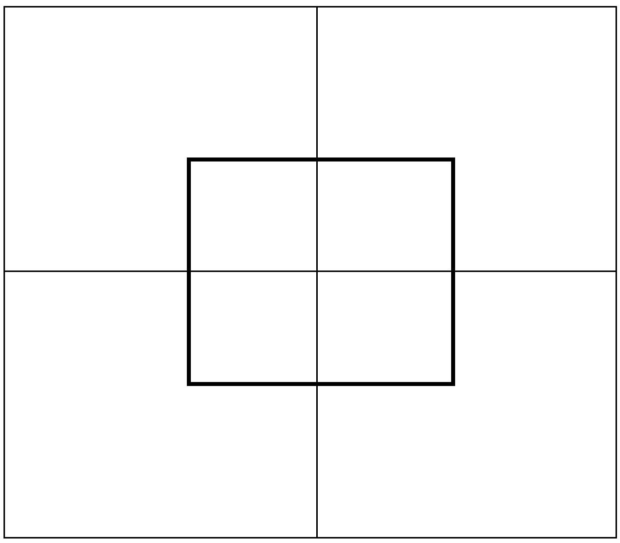


DIAGRAMA TRILITERALA

Egiazta ezazu silogismo hauek baliozkoak diren:

①

P_1: Zenbait pertsona itsusi aberatsak dira.
P_2: Eskimal guztiak ederrak dira.

K: *Zenbait pertsona aberats ez dira eskimalak.*

②

P_1: Liztor guztiak gogaikarriak dira.
P_2: Gogaikarriak diren animaliak gorrotagarriak dira.

K: *Liztor guztiak gorrotagarriak dira.*

③

P_1: Txori guztiek ozenki abesten dute.
P_2: Ozenki abesten duen ezein animalia ez da sentitzen triste.

K: *Txori guztiak pozik sentitzen dira.*

④

P_1: Ezein koadrupedok ez daki txistu egiten.
P_2: Zenbait katu koadrupedoak dira.

K: *Zenbait katuk ez daki txistu egiten.*

⑤

P_1: Zenbait ostra isilak dira.
P_2: Izaki zaratsuak alaiak dira.

K: *Ez dauka konklusiorik.*

⑥

P_1: Jende astuna beldurgarria da.
P_2: Zu astuna zara.

K: *Zu beldurgarria zara.*

7.- BIBLIOGRAFIA

- ALLEN PAULOS, John: *Pienso, luego río*. Cátedra, Madrid, 1987.

- CARROLL, Lewis: *El juego de la lógica*. Alianza Editorial, Madrid, 1982.

- CARROLL, Lewis: *Symbolic Logic*, Macmillan and co., London, 1897.

- CATHCART Thomas; KLEIN Daniel: *Platón y un ornitorrinco entran en un bar…* Planeta, Barcelona, 2008.

- COHEN, Martin: *101 problemas de filosofía*. Alianza Editorial, Madrid, 2003.

- DEAÑO, Alfredo: *Introducción a la lógica formal*. Alianza Universidad, Madrid, 1981.

- GARCÍA DEL CID, LAMBERTO: *La sonrisa de Pitágoras*. Debolsillo, Barcelona, 2007.

- SMULLYAN, RAYMOND: *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos*. Cátedra, Madrid, 1981.

- SMULLYAN, RAYMOND: *¿La dama o el tigre? y otros pasatiempos lógicos*. Cátedra, Madrid, 1989

- SMULLYAN, Raymond: *Juegos por siempre misteriosos*. Gedisa, Barcelona, 1988.

- URRUTIA BILBAO, Peru: *Logika sinbolikoa*. Gabirel Jauregi Bilduma. Eusko Jaurlaritzaren Argitalpen Zerbitzu Nagusia, Vitoria-Gasteiz, 2009.